

Chapitre 11 : La fonction exponentielle

Contenus

- Définition de la fonction exponentielle, comme unique fonction dérivable sur \mathbb{R} vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$. L'existence et l'unicité sont admises. Notation $\exp(x)$.
- Pour tous réels x et y , $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$ et $\exp(x)\exp(-x) = 1$. Nombre e . Notation e^x .
- Pour tout réel a , la suite (e^{na}) est une suite géométrique.
- Signe, sens de variation et courbe représentative de la fonction exponentielle.

Capacités attendues

- Transformer une expression en utilisant les propriétés algébriques de la fonction exponentielle.
- Pour une valeur numérique strictement positive de k , représenter graphiquement les fonctions $t \mapsto e^{-kt}$ et $t \mapsto e^{kt}$.
- Modéliser une situation par une croissance, une décroissance exponentielle (par exemple évolution d'un capital à taux fixe, décroissance radioactive).

Exemple d'algorithme

- Construction de l'exponentielle par la méthode d'Euler. Détermination d'une valeur approchée de e à l'aide de la suite $(1 + \frac{1}{n})^n$.

Approfondissements possibles

- Unicité d'une fonction f dérivable sur \mathbb{R} telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
- Pour tous réels x et y , $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$.
- La fonction exponentielle est strictement positive et croissante.

I- Définition et propriétés

Théorème et définition (admis) :

Il existe **une et une seule** fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} telle que :
$$\begin{cases} f=f' \\ f(0)=1 \end{cases}$$

Cette fonction est appelée **fonction exponentielle** et on la note **exp**

On a donc $\exp(0) = 1$ et une valeur approchée de $\exp(1)$ est 2,718

Théorème : Pour tous réels x et y , on a : $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$

Ce théorème permet d'établir d'autres propriétés algébriques bien utiles :

Propriété :

Pour tous réels x et y , on a :

- 1) $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$
- 2) $\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$
- 3) $(\exp(x))^n = \exp(nx) \quad n \in \mathbb{Z}$

Démonstration :

1) vu dans l'activité

$$2) \exp(x - y) = \exp(x + (-y)) = \exp(x) \times \exp(-y) = \exp(x) \times \frac{1}{\exp(y)} = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$

$$3) (\exp(x))^n = \exp(x) \times \exp(x) \times \dots \times \exp(x) = \exp(x + x + \dots + x) = \exp(nx)$$

II- La notation puissance

Les propriétés précédentes faisant penser aux propriétés des puissances, on écrit ainsi plutôt $\exp(x)$ sous la forme e^x .

La fonction exponentielle peut donc être définie par : $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$
 $x \mapsto e^x$

Les propriétés précédentes peuvent alors se réécrire :

$$e^0 = 1 \quad ; \quad e^1 = e \approx 2,718 \quad ; \quad e^{x+y} = e^x \times e^y \quad ; \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad ; \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

et pour tout entier n , $(e^x)^n = e^{nx}$

III- Etude de la fonction exponentielle

a) Sens de variation et signe

Propriétés :

1) La fonction exponentielle est **définie, dérivable** sur \mathbb{R} et $(e^x)' = e^x$

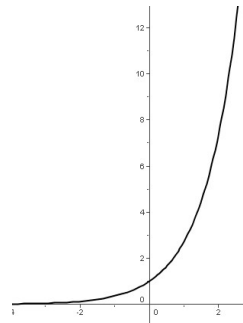
2) Pour tout réel x , $e^x > 0$

3) La fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} **Démonstration :**

b) Courbe représentative et tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	+
$f(x)$		0	$+\infty$

0 \nearrow 1 \nearrow



c) Un cas particulier $f(x) = e^{kx}$

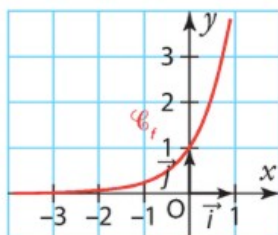
Propriété La fonction f définie par $f(x) = e^{kx}$ est dérivable sur \mathbb{R} et on a $f'(x) = k e^{kx}$

Conséquence :

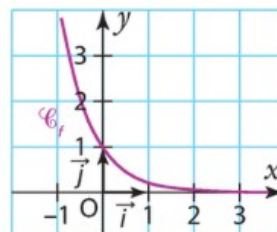
Si k est positif, $f'(x)$ est positif donc f est croissante

Si k est négatif, $f'(x)$ est négatif donc f est décroissante

k positif



k négatif



IV- Equations et inéquations

Propriétés Pour tout réel x et y :

- $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$
- $e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$

Ces propriétés sont des conséquences de la continuité de la fonction exponentielle et de la stricte croissance

On a évidemment les équivalences analogues en remplaçant le symbole $<$ par \leq ou \geq ou $>$

V- La fonction exponentielle et les suites géométriques

Théorème

La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = e^{na}$ est géométrique de raison e^a

Démonstration :

$$u_{n+1} = e^{(n+1)a} = e^{na+a} = e^{na} \times e^a = e^a \times u_n \text{ donc } u_n \text{ est une suite géométrique de raison } e^a$$