

Chapitre 13 : Géométrie repérée

I- Equation cartésienne

Equation cartésienne d'une droite

Toute droite d du plan admet une équation **cartésienne** de la forme :

$$d : ax + by + c = 0 \text{ avec } a \text{ et } b \text{ non tous deux nuls}$$

Un vecteur directeur de la droite d a alors pour coordonnées $\vec{u} (-b; a)$

Exemple Soit d la droite passant par $A(3; -1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1; 2)$.

Déterminer une équation cartésienne de la droite d

Soit un point $M(x; y) \in d$, les vecteurs \vec{AM} et \vec{u} sont colinéaires donc :

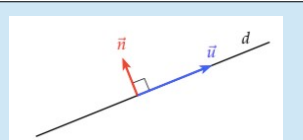
$$\begin{aligned} \det(\vec{AM}; \vec{u}) = 0 &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-3 & 1 \\ y+1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-3) \times 2 - (y+1) \times 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x - y - 7 = 0 \end{aligned}$$

A noter que cette équation n'est pas unique car on peut multiplier les coefficients par un nombre k quelconque : $2x - y - 7 = 0 \Leftrightarrow 4x - 2y - 14 = 0$

II- Vecteur normal à une droite

Définition Un vecteur **normal** \vec{n} à une droite d est un vecteur orthogonal à tout vecteur directeur \vec{u} de la droite d .

On a alors $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$



Théorème : Dans un repère orthonormé,

La droite d d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ admet le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ comme vecteur normal à d .

Exemple Soit d la droite d'équation $4x - 3y + 2 = 0$

Déterminer une équation de la droite Δ passant par $A(1; -2)$ et perpendiculaire à d

Un vecteur directeur de la droite d est un vecteur normal de la droite Δ .

Le vecteur $\vec{n}(3; 4)$ directeur de d est donc normal à la droite Δ

- **1ère façon**

Comme \vec{n} est normal à la droite Δ , l'équation de Δ est de la forme $3x + 4y + c = 0$

A est un point de la droite donc ses coordonnées vérifient l'équation de Δ :

$$3x_A + 4y_A + c = 0 \Leftrightarrow 3 - 8 + c = 0 \Leftrightarrow c = 5$$

L'équation de d est donc : $3x + 4y + 5 = 0$

- 2ème façon

Soit M un point de la droite d. Les vecteurs \overrightarrow{AM} et \vec{n} sont orthogonaux donc

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3(x-1) + 4(y+2) = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y + 5 = 0$$

III - Equation d'un cercle

Théorème : Dans un repère orthonormé, l'équation cartésienne d'un cercle C de centre $\Omega (a ; b)$ et de rayon r est de la forme :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Démonstration : Un point M (x;y) est sur C $\Leftrightarrow \Omega M = r$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

$$\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Exemple :

Reconnaitre l'ensemble des points M(x;y) qui vérifient la relation : $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 5 = 0$

On utilise pour cela la forme canonique rencontrée dans le premier chapitre

$$x^2 - 4x + y^2 + 6y + 5 = 0$$

$$(x-2)^2 - 4 + (y+3)^2 - 9 + 5 = 0$$

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 8$$

On reconnaît donc un cercle de centre $\Omega (2 ; -3)$ et de rayon $\sqrt{8}$