Chapitre 14 : Variables aléatoires

I- Variables aléatoires

a) Définition

Définition : Soit une expérience aléatoire d'univers Ω

Une variable aléatoire X sur Ω est une fonction, qui à chaque issue de Ω, associe un nombre réel

Exemples: Un joueur lance un dé a six faces.

L'univers de cette expérience aléatoire est donc $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

On peut définir, à partir de cette expérience, différentes variables aléatoires :

- Si le résultat est pair, le joueur gagne 2 €, s'il est impair il perd 3 €.
  On définit ainsi une variable aléatoire X de l'univers Ω vers $\{-3, 2\}$.
  On a : $(X = -3) = \{ 1 , 3 , 5 \}$ et $(X = 2) = \{ 2 , 4 , 6 \}$
- Le joueur gagne 2 jetons si le résultat est un carré parfait, sinon il perd 1 jeton. On définit une autre variable aléatoire X ' de l'univers Ω vers $\{ 2 , -1 \}$
  On a : $(X' = 2) = \{1; 4\}$ et $(X' = -1) = \{2, 3, 5, 6\}$

b) Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition : Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω prenant pour valeur $\{ x_1 \; ; \; x_2 \; ; ... \; ; \; x_n \}$.
Lorsqu'à chaque valeur x_i , on associe la probabilité de l'événement (X = x_i) , on définit ainsi la loi de probabilité de X

A noter que la loi de probabilité d'une variable aléatoire se présente le plus fréquemment à l'aide d'un tableau :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X=x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

Exemple : Une urne contient cinq jetons numérotés de 1 à 5. Un jeu de kermesse consiste en payant deux euros à tirer un jeton de cette urne puis :

- si le jeton est pair, le joueur gagne le double de la valeur indiquée sur le jeton
- sinon il perd sa mise

Si on appelle X le gain **algébrique** du joueur, X peut prendre comme valeur –2 , 2 ou 6 (attention il faut tenir compte de la mise) et on a :

- L'événement (X = –2) est réalisé pour les issues 1 , 3 , 5 donc 3 chances sur 5 : $P(X = -2) = \frac{3}{5}$
- L'événement (X = 2) est réalisé pour l'issue 2 donc 1 chance sur 5 : $P(X = 2) = \frac{1}{5}$
- L'événement (X = 6) est réalisé pour l'issue 4 donc 1 chance sur 5 : $P(X = 4) = \frac{1}{5}$

La loi de probabilité de X est donc :

x_i	–2	2	6
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

c) Espérance, variance et écart-type

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω dont la loi de probabilité est donnée ci-dessus:

L'espérance de X est le nombre noté E(X) défini par : E(X) = $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n$

Quelle est l'espérance dans le jeu de kermesse précédent ?

A noter : L'espérance trouvée ci-dessus s'interprète comme la moyenne en statistique.
Si un jeu a **une espérance nulle**, le jeu est qualifié d'**équitable**

Variance et écart type

- La variance de X est le nombre, noté V(X), défini par : V(X) = $\sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - \mathrm{E}(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - \mathrm{E}(X)^2$
- L'**écart type** de X est donné par $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)}$

Dans le cas de la kermesse, on a :

II- Transformation affine d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω et soit a et b deux réels
Considérons alors la variable aléatoire Y définie par Y = a X + b
On a alors : E(Y) = $a\,\mathrm{E}(X) + b$ V(Y) = $a^2\,\mathrm{V}(X)$ $\sigma(Y) = |a|\,\sigma(X)$