

Mini bac 3 Classe de Première C

Jeudi 18 Avril 2024

Durée 3 heures

Calculatrices en mode Examen

Exercice 1 Fonctions , dérivation

Soit f la fonction définie sur $[-10;10]$ par $f(x) = \frac{x^3-4}{x^2+1}$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire g

On pose pour tout réel x de $[-10;10]$: $g(x) = x^3 + 3x + 8$

1) Calculer $g'(x)$ et en déduire les variations de g sur $[-10;10]$.

$g'(x) = 3x^2 + 3$ $g'(x)$ est une somme de deux positifs donc g' est positive et g est croissante

2) Dresser le tableau de variations de g avec les valeurs aux bornes de l'ensemble de définition

| | | | |
|---------|-------|----------|------|
| x | -10 | α | 10 |
| $f'(x)$ | | + | |
| $f(x)$ | -1022 | 0 | 1038 |

3) a) Pourquoi peut-on affirmer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution que l'on notera α sur $[-10;10]$? Placer α dans le tableau de variation.

La fonction g est croissante sur $[-10;10]$ en passant d'une valeur négative (-1022) à une valeur positive (1038) . donc elle passe par 0

b) A l'aide de votre calculatrice, trouver une valeur approchée de α à 10^{-2} près
on trouve $-1,52 \leq \alpha \leq -1,51$ donc $\alpha \approx -1,51$

c) Pourquoi peut-on alors affirmer que g est positive sur $[\alpha;10[$?

g s'annule en α et est croissante sur $[\alpha;10]$ donc g est positive sur $[0;10]$

Partie B : Etude de la fonction f

On rappelle que la fonction f est définie sur $[-10;10]$ par $f(x) = \frac{x^3-4}{x^2+1}$

1) Montrer que f est bien définie sur l'intervalle $[-10;10]$

f est définie dès que $x^2+1 \neq 0$ c'est à dire dès que $x^2 \neq -1$ or un carré ne peut pas être égale à un négatif donc x^2+1 est différent de 0 pour tout $x \in [-10;10]$

2) Montrer que f' la fonction dérivée de f est définie par : $f'(x) = \frac{x \times g(x)}{(x^2+1)^2}$

f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = x^3-4$ et $v(x) = x^2+1$ donc

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{3x^2(x^2+1) - (x^3-4) \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4 + 8x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2 + 8x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{x(x^3 + 3x + 8)}{(x^2+1)^2} = \frac{x \times g(x)}{(x^2+1)^2}$$

3) a) Etudier le signe de la fonction dérivée f' à l'aide d'un tableau de signe

Le signe de f' est celui de $x \times g(x)$ car $(x^2+1)^2$ est un carré donc positif

| | | | | |
|------------------|-----|----------|---|-----|
| x | -10 | α | 0 | 10 |
| signe de x | - | : | - | 0 + |
| signe de $g(x)$ | - | 0 | + | : |
| signe de $f'(x)$ | + | 0 | - | 0 + |

b) Dresser alors le tableau de variations de f

| | | | | |
|---------|---------------------|-------------|----|-------------------|
| x | -10 | α | 0 | 10 |
| $f'(x)$ | + | 0 | - | 0 + |
| $f(x)$ | $-\frac{1004}{101}$ | $g(\alpha)$ | -4 | $\frac{996}{101}$ |

$$g(\alpha) = \frac{\alpha^3-4}{\alpha^2+1} \approx -2,3$$

4) Déterminer une équation de la tangente à C_f passant par le point A d'abscisse 2

$$y = f'(2)(x-2) + f(2)$$

$$f'(2) = \frac{2g(2)}{25} = \frac{2 \times 22}{25} = \frac{44}{25} \quad \text{et} \quad f(2) = \frac{4}{5}$$

$$y = \frac{44}{25}(x-2) + \frac{4}{5} \quad \text{donc l'équation est} \quad y = \frac{44}{25}x - \frac{68}{25}$$

Exercice 2 : Probabilité , Variable aléatoire

On considère deux élevages de chatons sacrés de Birmanie :

- Dans le premier élevage, 75 % des chatons deviennent couleur Chocolat et 25 % deviennent couleur Blue.
- Dans le second élevage 30 % des chatons deviennent couleur Chocolat et 70 % deviennent couleur Blue.

Une animalerie se fournit dans ces deux élevages. Elle achète 40 % de ses chatons au premier élevage et 60 % au deuxième.

On choisit au hasard un chaton de l'animalerie.

On note A l'événement « Le chaton provient du premier élevage » et B l'événement « Le chaton est de couleur Blue ».

On note \bar{A} l'événement contraire de A et \bar{B} l'événement contraire de B .

1.a. Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité ci-contre sans justifier.

1.b. Calculer $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ et interpréter le résultat

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,6 \times 0,3 = 0,18$$

1.c. Montrer que la probabilité que le chaton soit de couleur Chocolat est 0,48.

Proba totale $P(\bar{B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) + P(A \cap \bar{B}) = 0,18 + 0,4 \times 0,75 = 0,18 + 0,3 = 0,48$

1.d. Sachant que Jules a choisi un chaton couleur Blue dans cette animalerie, quelle est la probabilité que le chaton provienne du deuxième élevage ? On donnera le résultat à 10^{-2} près.

On veut $P_B(\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{0,6 \times 0,7}{1 - 0,48} \approx 0,807$ donc **0,81**

2. Le responsable du rayon fixe à 80 € le prix de vente d'un chaton couleur Blue du premier élevage et à 100 € le prix d'un chaton couleur Chocolat toujours du premier élevage.

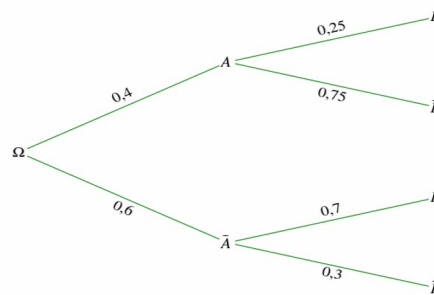
Les chatons du deuxième élevage sont vendus 10 % plus cher que ceux du premier

On choisit au hasard un chaton de l'animalerie et on désigne par X la variable aléatoire égale au prix en euros du chaton acheté.

2.a. Montrer que $P(X=80)=0,1$ et que $P(X=88)=0,42$

$$X = 80 \text{ correspond à } A \cap B \text{ donc } P(X=80) = 0,4 \times 0,25 = 0,1$$

$$X = 88 \text{ correspond à } \bar{A} \cap B \text{ donc } P(X=88) = 0,6 \times 0,7 = 0,42$$



2.b. Déterminer la loi de probabilité de X. (sans justification)

$$P(X = 100) = P(A \cap \bar{B}) = 0,3 \quad \text{et} \quad P(X = 110) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,18$$

| | | | | |
|--------|-----|------|-----|------|
| x | 80 | 88 | 100 | 110 |
| P(X=x) | 0,1 | 0,42 | 0,3 | 0,18 |

2.c. Montrer en détaillant les calculs que l'espérance \bar{m} de la variable aléatoire X est 94,76 et interpréter ce résultat

$$\bar{m} = E(X) = 0,1 \times 80 + 0,42 \times 88 + 0,3 \times 100 + 0,18 \times 110 = 94,76$$

2.d. Montrer, en détaillant les calculs, l'écart type σ de la variable aléatoire X est d'environ 9,54

$$V(X) = 0,1 \times 80^2 + 0,42 \times 88^2 + 0,3 \times 100^2 + 0,18 \times 110^2 - 94,76^2 = 9070,48 - 94,76^2 = 91,0224$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 9,54$$

2.e. Déterminer la probabilité $P(\bar{m} - \sigma < X < \bar{m} + \sigma)$

$$P(\bar{m} - \sigma < X < \bar{m} + \sigma) = P(94,76 - 9,54 < X < 94,76 + 9,54) = P(85,22 < X < 104,3) =$$

$$P(X=88) + P(X=100) = 0,42 + 0,3 = 0,72$$

Exercice 3 Produit scalaire

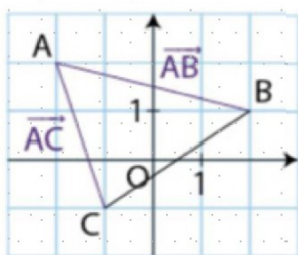
Les deux parties de cette exercice sont indépendantes

Partie A

Dans chacun des deux cas suivants, calculer le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$

1) Les points A, B et C sont donnés dans le

repère orthonormé ci-dessous

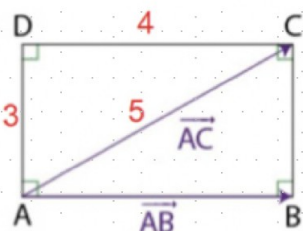


$$A(-2;2) , B(2;1) \text{ et } C(-1;-1)$$

$$\vec{AB} (4;-1) \quad \vec{AC} (1;-3)$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4 \times 1 + (-1) \times (-3) = 7$$

2) ABCD est le rectangle ci-dessous



Par projection orthogonale, on a :

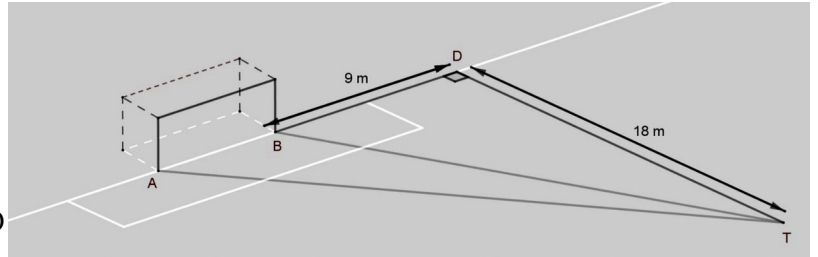
$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AB} = AB \times AB = 16$$

Partie B

Sur le dessin ci-dessous, la largeur du but est de $AB = 7,32$ mètres .

Les points A , B et D sont alignés.

On appelle T le point où se trouve un ballon. Le triangle ATD est rectangle en D



1) Pourquoi $\vec{TD} \cdot \vec{TB} = 0$?

Les deux vecteurs sont orthogonaux donc le produit scalaire est nul

2) a) A l'aide de la relation de Chasles, démontrer que $\vec{TA} \cdot \vec{TB} = TD^2 + DA \times DB$

$$\vec{TA} \cdot \vec{TB} = (\vec{TD} + \vec{DA}) \cdot (\vec{TD} + \vec{DB}) = \vec{TD}^2 + \vec{TD} \cdot \vec{DB} + \vec{DA} \cdot \vec{TD} + \vec{DA} \cdot \vec{DB}$$

Les vecteurs \vec{TD} et \vec{DB} ainsi que les vecteurs \vec{DA} et \vec{TD} sont orthogonaux donc les produits scalaires respectifs sont nuls d'où

$$\vec{TA} \cdot \vec{TB} = \vec{TD}^2 + \vec{DA} \cdot \vec{DB}$$

$$\vec{DA} \text{ et } \vec{DB} \text{ sont colinéaires de même sens donc } \vec{TA} \cdot \vec{TB} = TD^2 + DA \times DB$$

b) Montrer alors que $\vec{TA} \cdot \vec{TB} = 470,88$

$$\vec{TA} \cdot \vec{TB} = TD^2 + DA \times DB = 18^2 + (9 + 7,32) \times 9 = 470,88$$

3) Déterminer une valeur approchée, au dixième de degré près, de l'angle de tir , c'est à dire de l'angle \widehat{ATB} .

On calcule le produit scalaire avec les cosinus :

$$\vec{TA} \cdot \vec{TB} = TA \times TB \times \cos(\widehat{ATB})$$

$$\text{Le th de Pythagore donne : } TA^2 = TD^2 + DA^2 \qquad TB^2 = TD^2 + DB^2$$

$$TA^2 = 18^2 + 16,32^2 \qquad TB^2 = 18^2 + 9^2$$

$$TA = \sqrt{590,3424} \qquad TB = \sqrt{405}$$

$$TA \approx 24,3 \qquad TB \approx 20,12$$

$$\cos(\widehat{ATB}) = \frac{\vec{TA} \cdot \vec{TB}}{TA \times TB} \approx \frac{470,88}{24,3 \times 20,12} \approx 0,9631 \text{ d'où } \widehat{ATB} \approx 15,4^\circ$$