

Exercice QCM

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples . Pour chaque affirmation , une seule des quatre réponses est correcte . Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie . Aucune justification n'est demandée

Affirmation 1 Sur le cercle trigonométrique ci-contre, quel est le

point qui correspond à un angle de $\frac{9\pi}{4}$

- a) **M** b) N c) P d) A'

Affirmation 2 Sur le cercle trigonométrique ci-contre, à quel angle remarquable correspond le point Q ?

- a) $\frac{9\pi}{6}$ b) $\frac{11\pi}{6}$ c) $-\frac{5\pi}{6}$ d) $\frac{4\pi}{6}$

Affirmation 3 Soit $x \in [0; \pi]$. L'équation $\cos(x) = -0,5$ a pour solution :

- a) $\frac{9\pi}{6}$ b) $\frac{11\pi}{6}$ c) $-\frac{5\pi}{6}$ d) $\frac{4\pi}{6}$

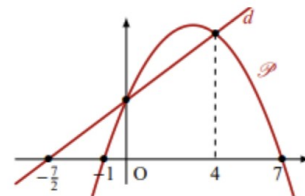
Affirmation 4 Soit $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$. Sachant que $\sin(x) = \frac{12}{13}$, on a :

- a) $\cos(x) = 0,923$ b) $\cos(x) = -0,923$ c) $\cos(x) = \frac{5}{13}$ d) **$\cos(x) = -\frac{5}{13}$**

Pour les affirmations 5 et 6 on a représenté :

- la droite d : $y : mx + p$
- et la parabole P : $y = ax^2 + bx + c$

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{mx+p}{ax^2+bx+c}$

**Affirmation 5**

La fonction f est définie sur :

- a) $\mathbb{R}$ b) $\mathbb{R} - \{4\}$ c) **$\mathbb{R} - \{-1; 7\}$** d) $[-1; 7]$

Affirmation 6

L'équation $f(x) = 1$ a pour ensemble solution

- a) $S = \left\{-\frac{7}{2}\right\}$ b) $S = \{0\}$ c) $S = [-1; 7]$ d) **$S = \{0; 4\}$**

Exercice 2

1) a) Dresser un tableau de signe de l'expression : $A = (x-1)(3x^2-2x-1)$

$$\Delta = 4+12 = 16 \quad x_1 = \frac{2-4}{6} = -\frac{1}{3} \quad x_2 = \frac{2+4}{6} = 1$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$	
$x-1$	-	$\vdots$	-	0	+
$3x^2-2x-1$	+	0	-	0	+
<i>Produit</i>	-	0	+	0	+

b) En déduire les solutions de l'inéquation $A > 0$

$$S =]-1/3;1[\cup]1;+\infty[$$

2) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2$

On admet que la dérivée de la fonction f est donnée par $f'(x) = 9x^2 - 10x$

a) Montrer que la tangente (T) à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 a pour équation $y = -x+1$

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$f'(1) = -1 \quad \text{et} \quad f(1) = 0$$

$$y = -1(x-1) + 0$$

$$y = -x+1$$

b) Montrer que pour tout réel x , on a : $3x^3 - 5x^2 + x + 1 = (x-1)(3x^2 - 2x - 1)$

$$(x-1)(3x^2 - 2x - 1) = 3x^3 - 2x^2 - x - 3x^2 + 2x + 1 = 3x^3 - 5x^2 + x + 1$$

c) Déduire, de ce qui précède, la position relative de la courbe de C_f et de la tangente T

Il faut étudier le signe de $f(x) - (-x+1)$

$$f(x) - (-x+1) = 3x^3 - 5x^2 + 2 + x - 1 = 3x^3 - 5x^2 + x + 1 = (x-1)(3x^2 - 2x - 1)$$

D'où d'après le tableau de signe de la question 1, on :

pour tout $x \in]-\infty; -1/3[\cup]1; +\infty[$, $f(x) - (-x+1) > 0$ cad $f(x) > -x+1$ donc C_f est au dessus de (T)

pour tout $x \in [-1/3; 1]$, $f(x) - (-x+1) \leq 0$ donc $f(x) \leq -x+1$ donc C_f est en dessous de (T)

Exercice 3

On considère les suites (u_n) , (v_n) et (w_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = 1 - 3n, \quad \begin{cases} v_0 = \frac{4}{9} \\ v_{n+1} = \frac{3v_n}{2} \end{cases}, \quad w_n = \frac{n^2}{2^n}$$

1) Compléter, sur le sujet, le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	Conjecturer la limite de la suite
u_n	1	-2	-5	-8	-11	$-\infty$
v_n	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$+\infty$
w_n	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{9}{8}$	1	0

2) Démontrer que la suite (u_n) est strictement décroissante

Etudions le signe de $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = 1 - 3(n+1) - (1 - 3n) = 1 - 3n - 3 - 1 + 3n = -3 < 0$$

Donc pour tout n , $u_{n+1} - u_n < 0$ cad $u_{n+1} < u_n$ et la suite est décroissante

3) On admet que (v_n) est une suite de terme strictement positive.

Démontrer que la suite (v_n) est strictement croissante

Etudions le signe de $v_{n+1} - v_n$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{3v_n}{2} - v_n = \frac{v_n}{2} \text{ or } v_n \text{ est positif donc } \frac{v_n}{2} \text{ aussi}$$

On a donc $v_{n+1} - v_n > 0$ d'où $v_{n+1} > v_n$ et la suite est croissante

4) On veut démontrer que la suite (w_n) est décroissante à partir du rang 3

a) Etudier le signe de $f(x) = -x^2 + 2x + 1$

$$\Delta = 8 \text{ donc deux racines } x_1 = \frac{-2 - \sqrt{8}}{-2} = 1 + \sqrt{2} \text{ et } x_2 = \frac{-2 + \sqrt{8}}{-2} = 1 - \sqrt{2}$$

d'où signe de a sauf entre les racines

b) Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $w_{n+1} - w_n = \frac{-n^2 + 2n + 1}{2^{n+1}}$

$$w_{n+1} - w_n = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} - \frac{n^2}{2^n} = \frac{(n+1)^2 - 2n^2}{2^{n+1}} = \frac{n^2 + 2n + 1 - 2n^2}{2^{n+1}} = \frac{-n^2 + 2n + 1}{2^{n+1}}$$

c) En déduire que si $n \geq 3$, alors $w_{n+1} \leq w_n$ et conclure

Comme 2^{n+1} est positif, le signe de $w_{n+1} - w_n$ est celui de $-n^2 + 2n + 1$

donc d'après 4) a), pour tout $n \geq 1 + \sqrt{2}$, $w_{n+1} - w_n \leq 0$

$$w_{n+1} \leq w_n$$

la suite est décroissante

Exercice 4

Dans un repère orthonormé $(O;I,J)$, C est le cercle trigonométrique de centre O.

1) On considère l'algorithme suivant :

```
def angle(x) :
    if x > π :
        while x > π :
            x = x - 2π
        print(x)
```

a) Quelle est la valeur affichée par l'algorithme pour $x = \frac{19\pi}{3}$?

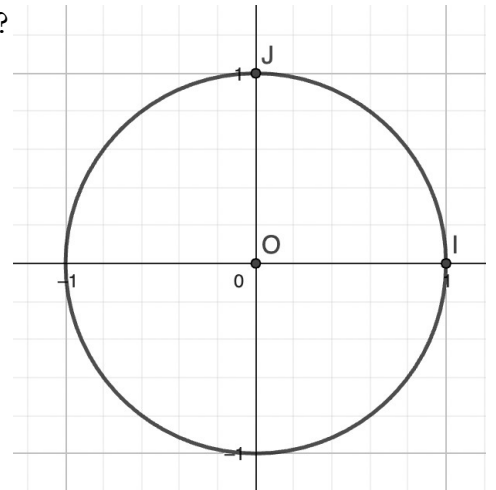
Quel est le rôle de cet algorithme ?

L'affichage sera $\frac{\pi}{3}$.

Cet algorithme permet de donner la mesure principale d'un angle positif

b) Créer un autre algorithme pouvant traiter le cas négatif

```
def angle(x) :
    if x ≤ -π :
        while x ≤ -π :
            x = x + 2π
        print(x)
```



2) K et L sont les points du cercle associés aux réels $\frac{25\pi}{4}$ et $-\frac{11\pi}{6}$

a) Déterminer la mesure principale des angles $(\vec{OI}; \vec{OL})$ et $(\vec{OI}; \vec{OK})$ puis placer L et K sur le cercle ci-contre

$$(\vec{OI}; \vec{OK}) = \frac{25\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 6\pi = \frac{\pi}{4} (2\pi) \quad (\vec{OI}; \vec{OL}) = -\frac{11\pi}{6} = \frac{\pi}{6} - 2\pi = \frac{\pi}{6} (2\pi)$$

b) Déterminer la mesure de l'angle $(\vec{OL}; \vec{OK})$

$$(\vec{OL}; \vec{OK}) = (\vec{OI}; \vec{OL}) - (\vec{OI}; \vec{OK}) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$$

3) **Question recherche** Sachant que quel que soit le réel x, $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$, déterminer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 \text{ donc pour } x = \frac{\pi}{12}, \text{ on a } \cos\left(\frac{2\pi}{12}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) - 1$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) - 1$$

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 1}{2}$$

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{4}}$$

On prend la valeur positive car $\frac{\pi}{12} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc le cos est positif

ensuite on sait que $\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1$

$$\frac{\sqrt{3}+2}{4} + \sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1$$

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}+2}{4}$$

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$$