Chapitre 3 : équations inéquations , intervalles

I- Equations

Les équations du premier degré (rappel)

Quelques règles simples s'appliquent lorsque l'on cherche à résoudre une équation c'est à dire lorsque l'on cherche à trouver la valeur d'une lettre , **l'inconnue**, afin d'obtenir une égalité vérifiée :

Règle 1 : On peut additionner (ou soustraire) un même nombre aux deux membres d'une égalité sans en changer l'ensemble solution

Règle 2 : On peut multiplier (ou diviser) par un même nombre **non nul** les deux membres d'une égalité sans en changer l'ensemble solution

Remarque : A noter qu'une équation peut ne pas avoir de solution ou une infinité de solutions. On en rencontrera en exercice, à vous de les repérer

II- Les intervalles de ℝ

a) Définition

Dans la suite, a et b désignent deux nombres réels tels que $a < b$

Ensemble des réels x tels que :	Représentation graphique	intervalle
$a \leq x \leq b$		
$a < x < b$		
$a < x \leq b$		
$x < b$		
$x \geq a$		

Vocabulaire [a ; b] se lit « intervalle **fermé** a , b »] a ; b [se lit « intervalle **ouvert** a ,b »
] a ; b] se lit « intervalle a , b **ouvert** en a et **fermé** en b »

Cas particulier IR =]$-\infty$; $+\infty$[[a ; a] = { a } ;] a ; a [= Ø (ensemble vide)

Exercices commentés 1) page 75

b) Opération sur les intervalles

Soit I et J deux intervalles

- L'ensemble des réels appartenant à I **ET** à J est **l'intersection** de I et J notée $I \cap J$. On lit «I inter J»
- L'ensemble des réels appartenant à I **OU** à J est l**a réunion** de I et J notée $I \cup J$. On lit «I union J»

Exemple :

a) I = [-2;5[et J =]1;7[alors $I \cap J$ =]1;5[et $I \cup J$ = [-2;7[

b) I =]1;5[et J =]-∞;3] alors $I \cap J$ =]1;3] et $I \cup J$ =]-∞;5[

Exercices commentés 2) page 75

III- Inéquation du premier degré

Résoudre une inéquation trouver les valeurs **l'inconnue** afin d'obtenir une inégalité vérifiée.

Quelques règles simples à connaître :

Règle 1 On peut additionner (ou soustraire) un même nombre aux deux membres d'une inéquation **sans changer** l'ordre de l'inégalité

Règle 2 Multiplier (ou Diviser) par un même nombre **POSITIF** les deux membres d'une inéquation ne change pas l'ordre de l'inégalité

Règle 3 Multiplier (ou Diviser) par un même nombre **NEGATIF** les deux membres d'une inéquation change l'ordre de l'inégalité

Application 1 : Résolution d'une inéquation

Inéquation 1	**Inéquation 2**
Résoudre $12x-5 \geq 7x+6$ **Règle 1 :** $12x - 5 + \mathbf{5 - 7x} \geq 7x + 6 + \mathbf{5 - 7x}$ $5x \geq 11$ **Règle 2 :** $\frac{5x}{5} \geq \frac{11}{5}$ $x \geq \frac{11}{5}$ On conclut S = $\left[\frac{11}{5};+\infty\right[$	Résoudre $8(x-4) > 3(4x+5)$ $8x-32 > 12x+15$ **Règle 1 :** $8x-32+32-12x > 12x+15+32-12x$ $-4x > 47$ **Règle 3 :** $\frac{-4x}{-4} < \frac{47}{-4}$ changement d'ordre $x < -\frac{47}{4}$ On conclut : S = $\left]-\infty;-\frac{47}{4}\right[$

Application 2 : Comparer deux nombres

Pour comparer deux nombres , on peut effectuer leur différence puis la comparer avec 0

Exemple : Soit A = 4x+1 et B = $7x-8$. Comparer A et B selon les valeurs de x

On calcule $A-B$

$$A-B = 4x+1-(7x-8)$$
$$A-B = 4x+1-7x+8$$
$$A-B = -3x+9$$

$$A > B \Leftrightarrow A-B>0 \quad \Leftrightarrow -3x+9>0 \quad \Leftrightarrow -3x>-9 \Leftrightarrow x<\frac{-9}{-3} = 3$$

On a donc : pour x ∈ $]-\infty;3[$, A > B

pour x ∈ $]-\infty;3[$, A < B

pour x = 3 , A = B

IV- Valeur absolue d'un nombre réel

a) Définition

Définition

La **valeur absolue** d'un nombre réel a est le nombre noté $|a|$ et tel que $|a| = \begin{cases} a & si \quad a \text{ est positif} \\ -a & si \quad a \text{ est négatif} \end{cases}$

Exemples $|5|=5$ car 5 est positif ; $|-3| = -(-3)$ car -3 est négatif ;

$|\pi-5| = -(\pi-5) = -\pi+5$ $car\ \pi-5$ est négatif

Remarques La valeur absolue d'un nombre est toujours positive. C'est le grand intérêt d'une valeur absolue.

Quand on veut un nombre positif on pense aux valeurs absolues : par exemple , $\sqrt{a^2}$ = ...

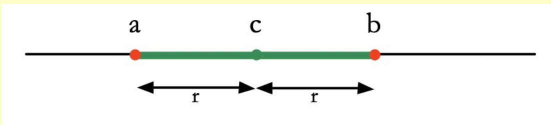
Propriété La distance entre deux points A et B sur une droite graduée est égale à AB = $|x_B - x_A|$

LE = $x_E - x_L = 2{,}5-(-3) = 5{,}5$ car $x_E > x_L$.

MF = $x_M - x_F = 8-(-7) = 15$ car $x_M > x_F$

Intervalle et valeur absolue

Soit I = [a;b] un intervalle de **centre** c et de **rayon** r .
La distance entre c et un autre point de l'intervalle est toujours inférieure à r .



Ainsi on a : $x \in [a\,;b] \Leftrightarrow |x-c| \leq r$

Exemple

- On veut caractériser l'intervalle $[-1;9]$ à l'aide d'une valeur absolue.

  On commence par calculer son centre: c = $\frac{-1+9}{2}$ = 4

  On calcule alors le rayon : 9 – 4 = $4-(-1)$ = 5

  On a donc x ∈ [-1;9] ⇔ $|x-4| \leq 5$
- On veut déterminer l'intervalle défini par $|x-3{,}5| \leq 2$

$$|x-3{,}5| \leq 2$$
$$-2 \leq x-3{,}5 \leq 2$$
$$-2+3{,}5 \leq x \leq 2+3{,}5$$
$$1{,}5 \leq x \leq 5{,}5$$

x ∈ $[1{,}5;3{,}5]$