<u>Les vecteurs</u>

I. Translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

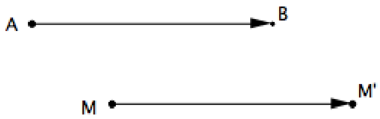
a) Définitions

Définition : TRANSLATION

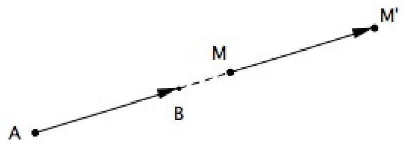
A et B désignent deux points du plan

La translation qui transforme A en B associe à tout point M du plan , l'unique point M' tel que ABM'M soit un parallélogramme. Cette translation est appelée **la translation de vecteur** $\overrightarrow{AB}$ notée $t_{\overrightarrow{AB}}$

1er cas : M $\notin$ (AB)



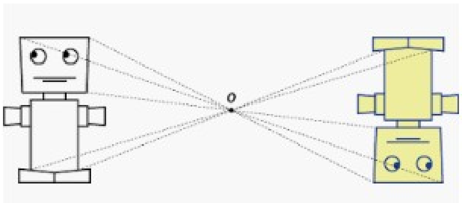
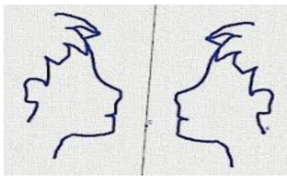
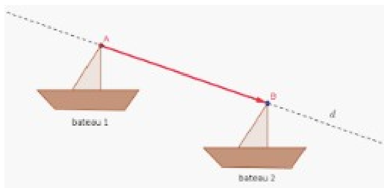
2ème cas : M $\in$ (AB)



Vocabulaire :

- Le point M' est appelé **l'image** de M par $t_{\overrightarrow{AB}}$
- On dit aussi que M' est **le translaté** de M

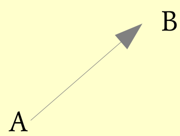
Remarques

• **Une symétrie centrale** est une transformation associée à un demi-tour	
• Une **symétrie axiale** peut être associée à un effet miroir	
• Une **translation** modélise un glissement rectiligne. Pour la définir, on indique la direction, le sens et la longueur du mouvement d'où la définition suivante :	

Définition d'un vecteur Soit A et B deux points du plan

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ se définit par :

- une **direction** : celle de la droite (AB)
- un **sens** : celui de A vers B
- une **longueur** ou **norme** : celle du segment [AB] notée $\|\overrightarrow{AB}\|$



On dit alors que A est **l'origine** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et B son **extrémité**

Remarque : **Lorsque les points A et B sont confondus, le vecteur** $\overrightarrow{AB}$ **est le vecteur nul. On le note** $\vec{0}$.

b) Vecteurs égaux

Définition : Dire que deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont égaux signifie qu'ils ont :

- la même direction : (AB) // (CD)
- le même sens : le sens de A vers B est le même que celui de C vers D
- la même longueur : AB = CD

Propriété : Deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont égaux si et seulement si le quadrilatère ABDC est un parallélogramme , éventuellement aplati.

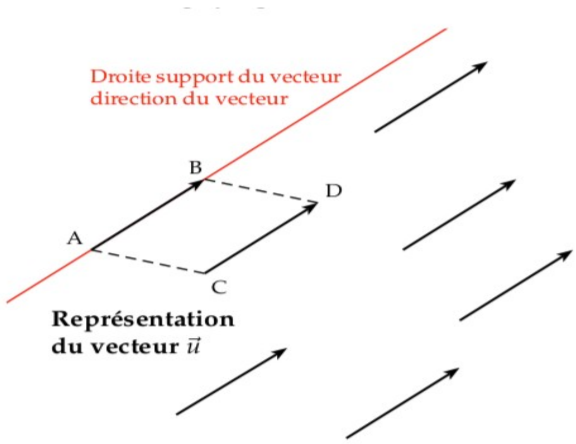
$\vec{AB}=\vec{CD}$ ⇔ ABDC est un parallélogramme

Représentants d'un vecteur

Sur la figure ci-contre, On a construit deux vecteurs égaux $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ mais on peut en tracer d'autre.

Tous les « segments munis une flèche » représentent le même vecteur $\vec{AB}$. On décide alors de noter ce même vecteur à l'aide d'une seule lettre $\vec{u}$.

Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont alors des représentants du vecteurs $\vec{u}$



II. Sommes de vecteurs

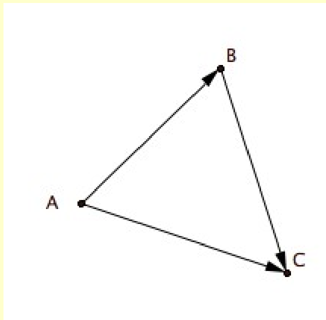
a) Relation de Chasles

Propriété :

Effectuer une translation de vecteur $\vec{AB}$ suivie d'une translation de vecteur $\vec{BC}$ revient à effectuer une translation de vecteur $\vec{AC}$ ce qui se note :

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} .$$

Cette relation s'appelle **la relation de Chasles**

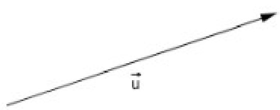


- Cette opération très simple permet de décomposer un vecteur en deux vecteurs plus intéressants . La seule contrainte est de faire correspondre l'origine du deuxième vecteur avec l'extrémité du premier

- La relation de Chasles permet d'écrire : $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA}$. Or $\vec{AA}$ = donc $\vec{AB} + \vec{BA}$ = d'où $\vec{AB}$ = . On dira que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{BA}$ sont

  De manière générale, $-\vec{u}$ désigne l'opposé de $\vec{u}$

  Construire l'opposé de $\vec{u}$ sur la figure ci-contre



b) Règle du parallélogramme

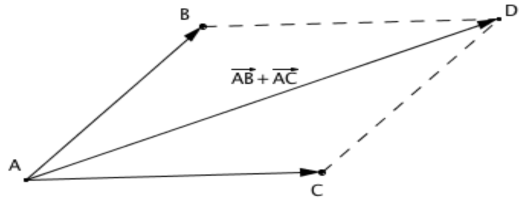
la règle du parallélogramme : Soit ABDC un parallélogramme. On a l'égalité : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$

Démonstration : Soit ABDC un parallélogramme.

On a donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ d'où : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$

La relation de Chasles permet alors d'écrire que

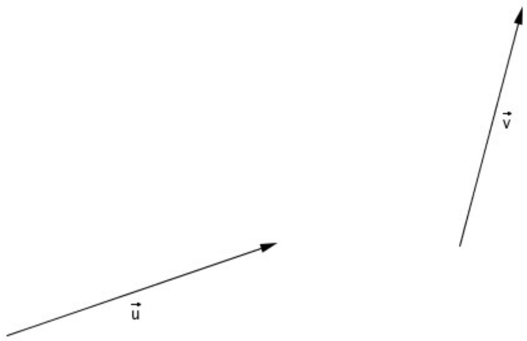
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$$



c) Addition de deux vecteurs

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs quelconques du plan.
On cherche à construire le vecteur somme $\vec{u} + \vec{v}$.
Pour cela , soit A,B,C et D quatre points du plan tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$.
Construire le vecteur somme $\vec{u} + \vec{v}$ revient donc à construire
On construit alors le point E tel que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CD}$
On a alors : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} +$ $=$

D'où $\vec{u} + \vec{v} =$

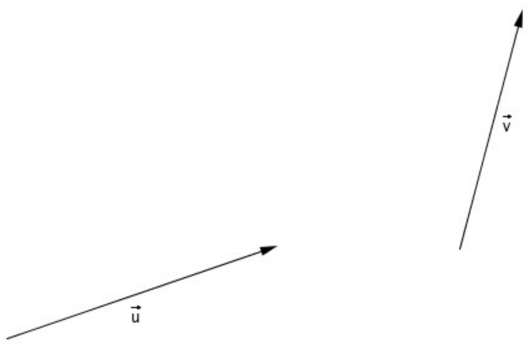


d) Soustraction de deux vecteurs

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
Soustraire le vecteur $\vec{v}$ au vecteur $\vec{u}$, c'est additionner son opposé $-\vec{v}$ à $\vec{u}$:

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

Ainsi, soustraire deux vecteurs revient à une addition



III- Multiplication d'un vecteur par un scalaire

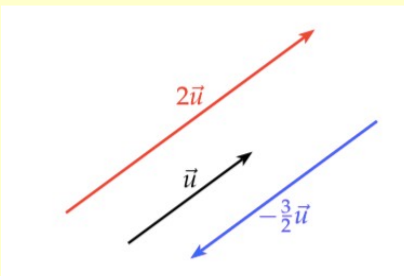
Le mot scalaire est utilisé en math pour désigner un nombre réel

a) Définition

Définition : Soit $\vec{u}$ un vecteur et k un réel

On définit le produit k $\vec{u}$ du scalaire k par le vecteur $\vec{u}$ par :

- si k est positif, $\vec{u}$ et k $\vec{u}$ ont même direction, même sens et $\|k\vec{u}\| = k\ \|\vec{u}\|$
- si k est négatif, $\vec{u}$ et k $\vec{u}$ ont même direction, sont de sens contraires et $\|k\vec{u}\| = -k\ \|\vec{u}\|$



b) Quelques propriétés

Propriété : La multiplication d'un vecteur par un scalaire est dite bilinéaire ce qui veut dire que :

- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$

Ces deux égalités permettent de travailler avec les vecteurs (presque) comme on travaille avec des nombres

$3\vec{u} + 4\vec{u}$ = $7\vec{u} - 4(\vec{u} - \vec{v})$ =

c) Colinéarité de vecteurs

Définition : Dire que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** signifie qu'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$

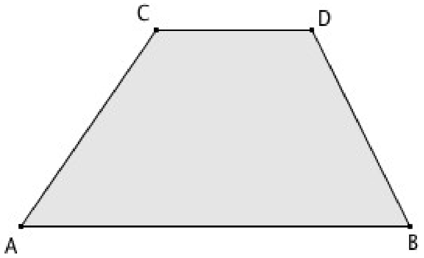
Remarque :

- Le vecteur $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur $\vec{u}$ car $\vec{0} = 0\vec{u}$
- Le trapèze ABDC ci-contre est tel que AB = 5 et CD = 2

  Le vecteur $\overrightarrow{CD}$ n'est pas un représentant du vecteur $\overrightarrow{AB}$ car les longueurs AB et CD ne sont pas égales .

  On peut cependant écrire la relation vectorielle suivante :

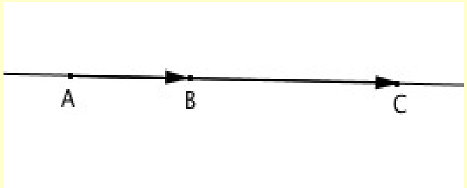
$$\overrightarrow{CD} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$$



Théorème 1: Points alignés

Trois points A , B et C sont alignés **si et seulement si** les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires :

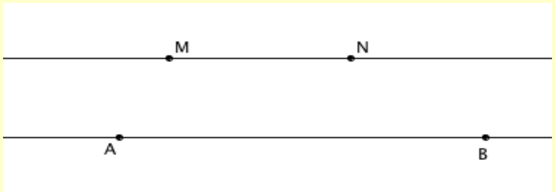
A , B , C alignés $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$



Théorème 2 : Droites parallèles

Deux droites (AB) et (MN) sont parallèles **si et seulement si** les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires :

(AB) // (MN) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{MN}$



Ces deux théorèmes sont importants car ils permettent de démontrer assez facilement que des points sont alignés ou que des droites sont parallèles. Vous les retrouverez régulièrement jusqu'en terminale