

Corrigé

1) Résoudre les équations suivantes (N'utiliser le delta que lorsque c'est nécessaire) :

$$8x^2 - 2x - 1 = 0 \quad \Delta = 36 > 0 \text{ deux racines } \frac{1}{2} \text{ et } -\frac{1}{4}$$

$$2x^2 - 7x = 0 \quad x(2x - 7) = 0 \text{ donc deux racines } 0 \text{ et } 7/2$$

$$-2x^2 - 5x + 7 = 0 \quad \Delta = 81 > 0 \text{ deux racines } 1 \text{ et } -7/2$$

$$7x^2 - 3 = 0 \quad x^2 = \frac{3}{7} \text{ donc } x = \pm \sqrt{\frac{3}{7}}$$

$$(2x - 3)(x + 3) - (x + 5)(2x - 4) = 0 \text{ on développe : } -3x + 11 = 0 \quad x = 11/3$$

2) Résoudre les inéquations suivantes :

$$-8x^2 - 64x - 30 \leq 0$$

$$\Delta = 3136 = 56^2 \text{ deux racines } -1/2 \text{ et } -15/2$$

signe de a sauf entre les racines donc $S =]-\infty; -15/2] \cup [-1/2; +\infty[$

$$\frac{2x - 1}{-7x^2 - 4x + 3} > 0$$

$$-7x^2 - 4x + 3 \quad \Delta = 100 > 0 \text{ deux racines } 3/14 \text{ et } -1$$

x	$-\infty$	-1	$3/14$	$1/2$	$+\infty$
Signe de $2x - 1$	-	-	-	0	+
Signe de $-7x^2 - 4x + 3$	-	0	+	0	-
Signe du quotient	+	VI	-	VI	+

$$S =]-\infty; -1[\cup]3/14; 1/2[$$

3) On donne $f(x) = 22x^2 - 3x + 4$ $g(x) = 36x^2 - 2x - 10$

a) Déterminer la forme factorisée de $f(x)$ et $g(x)$

$$f(x) \quad \Delta = 361 = 19^2 > 0 \text{ deux racines } 4/11 \text{ et } -1/2 \text{ donc } f(x) = -22 \left(x - \frac{4}{11} \right) \left(x + \frac{1}{2} \right) = (-22x + 8) \left(x + \frac{1}{2} \right)$$

$$g(x) \quad \Delta = 1444 = 38^2 > 0 \text{ deux racines } -1/2 \text{ et } 5/9 \text{ donc } g(x) = 36 \left(x + \frac{1}{2} \right) \left(x - \frac{5}{9} \right) = \left(x + \frac{1}{2} \right) (36x - 20)$$

b) Déterminer la forme canonique de $f(x)$ et $g(x)$

$$f(x) = -22 \left(x^2 + \frac{3}{22}x - \frac{4}{22} \right) = -22 \left(\left(x + \frac{3}{44} \right)^2 - \frac{9}{1936} - \frac{4}{22} \right) = -22 \left(x + \frac{3}{44} \right)^2 + \frac{361}{88}$$

$$g(x) = 36 \left(x^2 - \frac{x}{18} - \frac{5}{18} \right) = 36 \left(\left(x - \frac{1}{36} \right)^2 - \frac{1}{1296} - \frac{5}{18} \right) = 36 \left(x - \frac{1}{36} \right)^2 - \frac{361}{36}$$

II- Dérivation

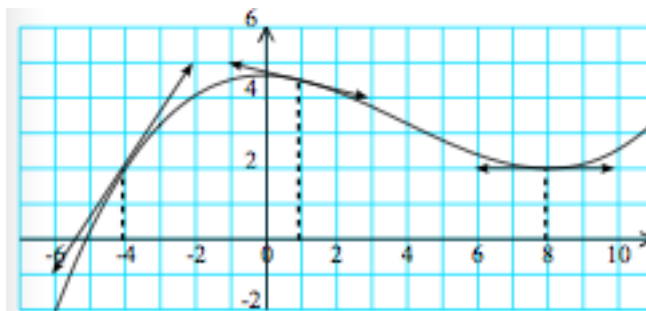
1) A l'aide de la définition

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 - 2x - 1$. Montrer que f est dérivable en 3 et déterminer $f'(3)$

Il faut calculer $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h + 4 = 4$ comme cette limite existe, f est dérivable en 3 et on a $f'(3) = 4$

2) Graphiquement

Lire les valeurs de $f'(-4)$, $f'(1)$ et $f'(8)$ sur la courbe ci-dessous



$$f'(-4) = \frac{3}{2}, \quad f'(1) = -\frac{1}{2}, \quad f'(8) = 0$$

3) En utilisant les formules

Calculer $f'(x)$ dans les cas suivants :

a) $f(x) = (2-x)\sqrt{x}$

b) $g(x) = \frac{2x^2}{x+3}$

c) $h(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$

a) $f'(x) = -\sqrt{x} + (2-x) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-2x + 2 - x}{2\sqrt{x}} = \frac{-3x + 2}{2\sqrt{x}}$

b) $g'(x) = \frac{4x(x+3) - 2x^2}{(x+3)^2} = \frac{2x^2 + 12x}{(x+3)^2}$

c) $h'(x) = -\frac{2x}{(x^2 - 4)^2}$

4) Variation d'une fonction

Dresser le tableau de variation de la fonction f définie par $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x - 1$

$f'(x) = 3x^2 + 4x - 7$ $\Delta = 100 > 0$ deux racines -1 et $\frac{7}{3}$ f' du signe de a sauf entre ses racines donc

x	$-\infty$	$-\frac{7}{3}$	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frac{365}{27}$ -5				

5) Exercice bilan

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2+7x+10}{x+1}$

a) Calculer $f'(x) = \frac{(2x+7)(x+1)-(x^2+7x+10)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$

b) En déduire les variations de f

pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $(x+1)^2 > 0$ donc le signe de f' est celui de x^2+2x-3

$\Delta = 16 > 0$ deux racines 1 et -3. f' est du signe de a sauf entre ses racines donc

pour tout $x \in]-\infty; -3] \cup [1; +\infty[$, $f'(x) \geq 0$ et f est croissante

pour tout $x \in]-3; -1[\cup]-1; 1]$, $f'(x) \leq 0$ et f est décroissante

c) Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe représentative (C) de f au point A d'abscisses -2

$y = f'(-2)(x+2) + f(-2)$ avec $f'(-2) = -3$ et $f(-2) = 0$ donc $y = -3x - 6$

d) Sur la calculatrice, tracer (C) en précisant les paramètres utilisés pour la fenêtre graphique

$x_{\min} = -5$ $x_{\max} = 5$ $y_{\min} = -10$ $y_{\max} = 20$

e) Henri affirme que l'équation $f(x) = 3$ n'a pas de solution. Etes-vous d'accord? Argumenter

si on trace la droite d'équation $y = 3$ elle ne semble pas avoir de points d'intersection avec la courbe mais résolvons l'équation $f(x) = 3$ pour $x \neq -1$:

$\frac{x^2+7x+10}{x+1} = 3$ donc $x^2+7x+10 = 3x+3$ $x^2+4x+7=0$ $\Delta = -12 < 0$ donc pas de racines

l'équation n'a donc pas de solution

II- Les suites

1) conjecturer la limite d'une suite

Pour chacune des suites ci-dessous, calculer les 5 premiers termes :

a) $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ $u_1 = 2; u_2 = 1,5; u_3 = \frac{4}{3}; u_4 = \frac{5}{4}; u_5 = \frac{6}{5}$

b) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{2}{n} \end{cases}$ $u_2 = 3; u_3 = 4; u_4 = \frac{14}{3}; u_5 = \frac{31}{6}; u_6 = \frac{167}{30}$

c) (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de premier terme 2 : $\frac{3}{2}; \frac{9}{8}; \frac{27}{32}; \frac{81}{128}; \frac{243}{512}$

d) (u_n) est une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme 4 : 4; 7; 10; 13; 16

2) Variations

Etudier le sens de variation des suites données en a) et b) dans la question 1

$u_n = 1 + \frac{1}{n}$: $u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{n+1} - 1 - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$ donc (u_n) décroissante

$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{2}{n} \end{cases}$ $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{n} > 0$ donc (u_n) croissante

3) Un exercice classique

Le président d'un club de handball a constaté que chaque année, il perd 20 % des adhérents de l'année précédente et qu'il y a 20 nouveaux licenciés chaque année. En 2008, le club comptait 150 adhérents.

On note u_n le nombre de licenciés l'année 2008 + n .

a) Calculer $u_1 = 150 \times 0,8 + 20 = 140$

b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n $u_{n+1} = 0,8 \times u_n + 20$

c) La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ?

$$u_2 = 0,8 \times 140 + 20 = 132 \quad u_1 - u_0 = 140 - 150 = -10 \quad \text{Et } u_2 - u_1 = 132 - 140 = -8 .$$

Si la suite était arithmétique on aurait $u_1 - u_0 = u_2 - u_1$ comme ce n'est pas le cas non arithmétique

$$u_1 / u_0 = \frac{140}{150} = \frac{14}{15} \quad \text{et } u_2 / u_1 = \frac{132}{140} = \frac{33}{35} \neq 14/15 \text{ donc non géo}$$

d) Ecrire un algorithme permettant de calculer le terme de rang n entré par l'utilisateur variable :

Traitement

lire n

u prend la valeur 150

p prend la valeur 0

tant que p < n faire :

u prend la valeur 0,8u+20

p prend la valeur p+1

Fin TQ

Afficher u

e) On note (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 100$

e1) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 100 = 0,8u_n - 80 = 0,8(u_n - 100) = 0,8v_n \text{ donc geo de raison } 0,8 \text{ de premier terme } v_0 = 50$$

e2) Exprimer v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n

$$v_n = v_0 \times q^n = 50 \times 0,8^n \text{ donc } u_n = v_n + 100 = 50 \times 0,8^n + 100$$

e3) Quelle semble être la limite de la suite (u_n) ?

la limite semble être 100

III- Probabilité

Une urne contient dix boules dont trois rouges

1) On tire une boule de l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge ? $3/10$

2) On tire deux boules l'une après l'autre en remettant à chaque fois la boule tirée dans l'urne. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de boules rouges obtenues .

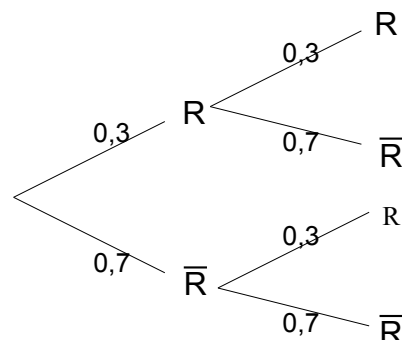
a) Faire un arbre pondéré illustrant la situation

b) Dresser un tableau donnant la loi de probabilité de X

X peut prendre comme valeur 0 , 1 , 2

$$P(X=0)=0,7^2=0,49 \quad P(X=2)=0,3^2=0,09$$

$$P(X=1)=0,3 \times 0,7 + 0,7 \times 0,3 = 0,42$$



3) On tire quatre boules l'une après l'autre en remettant à chaque fois la boule tirée dans l'urne. On note Y la variable aléatoire qui donne le nombre de boules rouges obtenues .

a) Expliquer pourquoi Y suit une loi binomiale. Préciser les paramètres de cette loi

un tirage d'une boule peut être assimilé à une épreuve de Bernoulli avec pour succès la boule est rouge de probabilité 0,3 Comme on répète quatre fois de suite dans les mêmes conditions cette expérience, Y suit une loi binomiale de paramètres 0,3 et 4

$$\begin{aligned} \text{b) Calculer } P(Y=1) &= \binom{4}{1} 0,3^1 \times 0,7^3 = 0,4116 \quad \text{puis } P(Y \leq 2) = P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2) = \\ &0,7^4 + 0,4116 + \binom{4}{2} 0,3^2 \times 0,7^2 = 0,9163 \end{aligned}$$

c) Calculer l'espérance de Y . Que représente ce nombre ?

$E(Y) = np = 4 \times 0,3 = 1,2$ donc en moyenne en répétant plusieurs cette même expérience, on obtiendra 1,2 boules rouges

IV- Algorithmique

1) Ecrire un algorithme qui affiche le terme de rang 4 d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison r saisis par l'utilisateur

variables

traitement

lire u_0

lire r

n prend la valeur 0

tant que $n < 4$:

 n prend la valeur n+1

 u prend la valeur $u_0 + n \times r$

Fin tant que

afficher u

- 2) Ecrire un algorithme qui affiche les termes jusqu'au rang n d'une suite arithmétique, le premier terme u_0 , le raison r et le rang n étant saisis par l'utilisateur

variable

traitement

lire n

p prend la valeur 0

lire u0

lire r

tant que p < n

p prend la valeur p+1

u prend la valeur $r^p \cdot u_0$

Afficher u

Fin tant que

V- Trigonométrie

- 1) a) Placer avec précision sur le cercle trigonométrique ci-dessous les points associés aux réels suivants :

$$\frac{4\pi}{3}, \quad \frac{7\pi}{4}, \quad \frac{35\pi}{6}, \quad \frac{2001\pi}{6}$$

- b) En déduire leur mesure principale

$$-\frac{4\pi}{3} \rightarrow \frac{6\pi}{3} - \frac{4\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \quad \frac{7\pi}{4} \rightarrow \frac{7\pi}{4} - 2\pi = -\frac{\pi}{4} \quad \frac{35\pi}{6} \rightarrow \frac{35\pi}{6} - 6\pi = -\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{2001\pi}{6} \rightarrow \frac{2001\pi}{6} - 334\pi = -\frac{3\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}$$

- c) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(x) = \cos\left(\frac{35\pi}{6}\right)$. Quelles sont ses solutions sur $[-\pi; 2\pi]$?

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$-\pi \leq -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq 2\pi \quad \text{donne} \quad \frac{-5}{12} \leq k \leq \frac{13}{12} \quad \text{donc } k = 0 \text{ ou } 1 \quad \text{et } x = -\frac{\pi}{6} \text{ ou } -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$$

$$-\pi \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq 2\pi \quad \text{donne} \quad \frac{-7}{12} \leq k \leq \frac{11}{12} \quad \text{donc } k = 0 \quad \text{et } x = \frac{\pi}{6}$$

- 2) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\sin\left(x + \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$$\begin{cases} x + \frac{\pi}{5} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ x + \frac{\pi}{5} = \pi - \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} x = \frac{7\pi}{15} + 2k\pi \\ x = \frac{2\pi}{15} + 2k\pi \end{cases}$$

- 3) On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(t) = 1 + 3\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + 2\cos(t + \pi)$

Sa représentation graphique est donnée ci-dessous

a) Calculer $u(0) = 1 + 3 - 2 = 2$, $u\left(\frac{7\pi}{4}\right) = 1 + 3\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 1 + \frac{3\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$,

$$u\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = 1 + 3\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 1 - \frac{3}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

b) Par lecture graphique, déterminer les antécédents du nombre 1 par la fonction u sur $[-3\pi; 4\pi]$

c) A l'aide des angles associés, écrire plus simplement $u(t)$ et retrouver alors les résultats de la question précédentes par le calcul

$$u(t) = 1 + 3\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + 2\cos(t + \pi) = 1 + 3\cos(t) - 2\cos(t) = 1 + \cos(t)$$

antécédents de 1 par u donc $u(t) = 1$ qui donne $\cos(t) = 0$ donc $t = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

On veut résoudre sur $[-3\pi; 4\pi]$ donc

- $-3\pi \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 4\pi \rightarrow -\frac{7}{4} \leq k \leq \frac{7}{4}$ d'où $k = \{-1; 0; 1\}$ et $t = -\frac{3\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{5\pi}{2}$
- $-3\pi \leq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 4\pi \rightarrow -\frac{5}{4} \leq k \leq \frac{9}{4}$ d'où $k = \{-1; 0; 1; 2\}$ et $t = -\frac{5\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$ ou $\frac{7\pi}{2}$