

Exercice 3

Dans un examen, une épreuve notée sur dix points est constituée de deux exercices : le premier est noté sur deux points, le deuxième sur huit points.

Partie I

Le premier exercice est constitué de deux questions Q1 et Q2.

Chaque question est notée sur un point. Une réponse correcte rapporte un point; une réponse incorrecte, incomplète ou une absence de réponse rapporte zéro point.

On considère que :

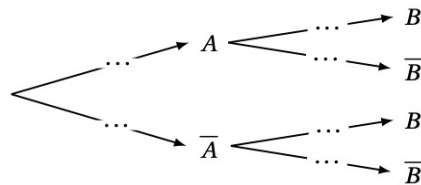
- Un candidat pris au hasard a une probabilité 0,8 de répondre correctement à la question Q1.
- Si le candidat répond correctement à Q1, il a une probabilité 0,6 de répondre correctement à Q2; s'il ne répond pas correctement à Q1, il a une probabilité 0,1 de répondre correctement à Q2.

On prend un candidat au hasard et on note :

- A l'évènement : « le candidat répond correctement à la question Q1 »;
- B l'évènement : « le candidat répond correctement à la question Q2 ».

On note \bar{A} et \bar{B} les évènements contraires de A et de B .

1. Recopier et compléter les pointillés de l'arbre pondéré ci-dessous.



2. Calculer la probabilité que le candidat réponde correctement aux deux questions Q1 et Q2.
3. Calculer la probabilité que le candidat réponde correctement à la question Q2.

On note :

- X_1 la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à la question Q1;
 - X_2 la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à la question Q2;
 - X la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à l'exercice, c'est-à-dire $X = X_1 + X_2$.
4. Déterminer l'espérance de X_1 et de X_2 . En déduire l'espérance de X . Donner une interprétation de l'espérance de X dans le contexte de l'exercice.
 5. On souhaite déterminer la variance de X .
 - a. Déterminer $P(X = 0)$ et $P(X = 2)$. En déduire $P(X = 1)$.
 - b. Montrer que la variance de X vaut 0,57.
 - c. A-t-on $V(X) = V(X_1) + V(X_2)$? Est-ce surprenant?

Partie II

Le deuxième exercice est constitué de huit questions indépendantes.

Chaque question est notée sur un point. Une réponse correcte rapporte un point; une réponse incorrecte et une absence de réponse rapporte zéro point.

Les huit questions sont de même difficulté : pour chacune des questions, un candidat a une probabilité $\frac{3}{4}$ de répondre correctement, indépendamment des autres questions.

On note Y la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note au deuxième exercice, c'est-à-dire le nombre de bonnes réponses.

1. Justifier que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Donner la valeur exacte de $P(Y = 8)$.
3. Donner l'espérance et la variance de Y .

Partie III

On suppose que les deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes. On note la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note totale à l'examen : $Z = X + Y$.

1. Calculer l'espérance et la variance de Z .
2. Soit n un nombre entier strictement positif.

Pour i entier variant de 1 à n , on note Z_i la variable aléatoire qui, à un échantillon de n élèves, associe la note de l'élève numéro i à l'examen.

On admet que les variables aléatoires Z_1, Z_2, \dots, Z_n sont identiques à Z et indépendantes.

On note M_n la variable aléatoire qui, à un échantillon de n élèves, associe la moyenne de leurs n notes, c'est-à-dire :

$$M_n = \frac{Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n}{n}$$

- a. Quelle est l'espérance de M_n ?
- b. Quelles sont les valeurs de n telles que l'écart type de M_n soit inférieur ou égal à 0,5 ?
- c. Pour les valeurs trouvées en **b.**, montrer que la probabilité que $6,3 \leq M_n \leq 8,3$ est supérieure ou égale à 0,75 .

Partie A

Suite à une étude statistique réalisée dans la station-service Carbuplus, on évalue à 0,25 la probabilité qu'un client venant alimenter son véhicule en carburant passe moins de 12 minutes dans la station avant de la quitter.

On choisit au hasard et de façon indépendante 10 clients de la station et on assimile ce choix à un tirage avec remise. On appelle X la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 10 clients associe le nombre de ces clients ayant passé moins de 12 minutes à la station.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Préciser ses paramètres.
2. Quelle est la probabilité qu'au moins 4 clients dans un échantillon de 10 passent moins de 12 minutes à la station? On arrondira si besoin le résultat à 10^{-3} près.
3. Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Un client arrive à la station et se dirige vers une pompe. Il constate que deux voitures sont devant lui, la première accédant à la pompe au moment de son arrivée.

On désigne par T_1, T_2, T_3 les variables aléatoires qui modélisent les temps passés en minute par chacun des trois clients, dans leur ordre d'arrivée, pour alimenter son véhicule entre l'instant où la pompe est disponible pour lui et celui où il la libère.

On suppose que T_1, T_2, T_3 sont des variables aléatoires indépendantes de même espérance égale à 6 et de même variance égale à 1.

On note S la variable aléatoire correspondant au temps d'attente total passé à la station du troisième client entre son arrivée à la station et son départ de la pompe après avoir alimenté son véhicule.

1. Exprimer S en fonction de T_1, T_2 et T_3 .
2.
 - a. Déterminer l'espérance de S et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
 - b. Quelle est la variance du temps d'attente total S de ce troisième client?
3. Montrer que la probabilité que le troisième client passe un temps strictement compris entre 14 et 22 minutes à la station est supérieure ou égale à 0,81.

EXERCICE 1**5 points**

La directrice d'une école souhaite réaliser une étude auprès des étudiants qui ont passé l'examen de fin d'étude, pour analyser la façon dont ils pensent avoir réussi cet examen. Pour cette étude, on demande aux étudiants à l'issue de l'examen de répondre individuellement à la question : « Pensez-vous avoir réussi l'examen? ». Seules les réponses « oui » ou « non » sont possibles, et on observe que 91,7% des étudiants interrogés ont répondu « oui ».

Suite à la publication des résultats à l'examen, on découvre que :

- 65 % des étudiants ayant échoué ont répondu « non »;
- 98 % des étudiants ayant réussi ont répondu « oui ».

On interroge au hasard un étudiant qui a passé l'examen.

On note R l'évènement « l'étudiant a réussi l'examen » et Q l'évènement « l'étudiant a répondu « oui » à la question ».

Pour un évènement A quelconque, on note $P(A)$ sa probabilité et \bar{A} son évènement contraire.

Dans tout l'exercice, les probabilités sont, si besoin, arrondies à 10^{-3} près.

1. Préciser les valeurs des probabilités $P(Q)$ et $P_{\bar{R}}(\bar{Q})$.

2. On note x la probabilité que l'étudiant interrogé ait réussi l'examen.

- a. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre.

- b. Montrer que $x = 0,9$.

3. L'étudiant interrogé a répondu « oui » à la question.

Quelle est la probabilité qu'il ait réussi l'examen?

4. La note obtenue par un étudiant interrogé au hasard est un nombre entier entre 0 et 20. On suppose qu'elle est modélisée par une variable aléatoire N qui suit la loi binomiale de paramètres $(20 ; 0,615)$.

La directrice souhaite attribuer une récompense aux étudiants ayant obtenu les meilleurs résultats.

À partir de quelle note doit-elle attribuer les récompenses pour que 65 % des étudiants soient récompensés?

5. On interroge au hasard dix étudiants.

Les variables aléatoires N_1, N_2, \dots, N_{10} modélisent la note sur 20 obtenue à l'examen par chacun d'entre eux. On admet que ces variables sont indépendantes et suivent la même loi binomiale de paramètres $(20 ; 0,615)$.

Soit S la variable définie par $S = N_1 + N_2 + \dots + N_{10}$.

Calculer l'espérance $E(S)$ et la variance $V(S)$ de la variable aléatoire S .

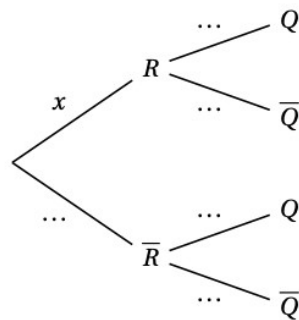
6. On considère la variable aléatoire $M = \frac{S}{10}$.

- a. Que modélise cette variable aléatoire M dans le contexte de l'exercice?

- b. Justifier que $E(M) = 12,3$ et $V(M) = 0,47355$.

- c. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, justifier l'affirmation ci-dessous.

« La probabilité que la moyenne des notes de dix étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est d'au moins 80 % ».



EXERCICE 1**5 points**

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Une société de vente en ligne procède à une étude du niveau de fidélité de ses clients. Elle définit pour cela comme « régulier » un client qui a fait des achats chaque année depuis trois ans.

Elle constate que 60 % de ses clients sont des clients réguliers, et que parmi eux, 47 % ont acheté la carte de fidélité.

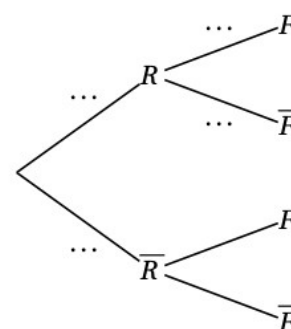
Par ailleurs, parmi l'ensemble de tous les clients de la société, 38 % ont acheté la carte de fidélité.

On interroge au hasard un client et on considère les évènements suivants :

- R : « le client est un client régulier »;
- F : « le client a acheté la carte de fidélité ».

Pour un évènement E quelconque, on note \bar{E} son évènement contraire et $P(E)$ sa probabilité.

- Reproduire l'arbre ci-contre et compléter les pointillés.
 - Calculer la probabilité que le client interrogé soit un client régulier et qu'il ait acheté la carte de fidélité.
 - Déterminer la probabilité que le client ait acheté la carte de fidélité sachant que ce n'est pas un client régulier.
 - Le directeur du service des ventes affirme que parmi les clients qui ont acheté la carte de fidélité, plus de 80 % sont des clients réguliers.
Cette affirmation est-elle exacte? Justifier.



- On choisit un échantillon de 20 clients de la société sélectionnés de manière indépendante. On suppose que ce choix s'assimile à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 20 clients associe le nombre de clients ayant acheté la carte de fidélité parmi eux. On rappelle que $P(F) = 0,38$.
Les valeurs des probabilités demandées seront arrondies à 10^{-3} près.
 - Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire X ? Justifier.
 - Déterminer la probabilité qu'au moins 5 clients aient acheté la carte de fidélité dans un échantillon de 20.

Partie B

La société demande à un institut de sondage de faire une enquête sur le profil de ses clients réguliers. L'institut a élaboré un questionnaire en ligne constitué d'un nombre variable de questions.

On choisit au hasard un échantillon de 1 000 clients réguliers, à qui le questionnaire est proposé. On considère que ces 1 000 clients répondent.

- Pour les remercier, la société offre un bon d'achat à chacun des clients de l'échantillon. Le montant de ce bon d'achat dépend du nombre de questions posées au client.
- La société souhaite récompenser particulièrement les clients de l'échantillon qui ont acheté une carte de fidélité et, en plus du bon d'achat, offre à chacun d'eux une prime d'un montant de 50 euros versée sur la carte de fidélité.

On note Y_1 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients réguliers, associe le total, en euros, des montants du bon d'achat des 1 000 clients.

On admet que son espérance $E(Y_1)$ est égale à 30 000 et que sa variance $V(Y_1)$ est égale à 100 000.

On note X_2 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients réguliers, associe le nombre de clients ayant acheté la carte de fidélité parmi eux, et on note Y_2 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients, associe le total, en euros, des montants de la prime de fidélité versée.

On admet que X_2 suit la loi binomiale de paramètres 1 000 et 0,47 et que $Y_2 = 50X_2$.

1. Calculer l'espérance $E(X_2)$ de la variable X_2 et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

On note $Y = Y_1 + Y_2$ la variable aléatoire égale au total général, en euros, des montants offerts (bon d'achat et prime de fidélité) aux 1 000 clients. On admet que les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont indépendantes.

On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \frac{Y}{1\,000}$.

2. Préciser ce que modélise la variable Z dans le contexte de l'exercice.
Vérifier que son espérance $E(Z)$ est égale à 53,5 et que sa variance $V(Z)$ est égale à 0,722 75.
3. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, vérifier que la probabilité que Z soit strictement compris entre 51,7 euros et 55,3 euros est supérieure à 0,75.