DS Récurrence Terminale

Le Vendredi 13 septembre

1 heure

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n par : $u_{n+1} = \frac{4}{5-u_n}$

1) **Recopier** et compléter la fonction Python suivante suite(n) qui prend comme paramètre le rang n et renvoie la valeur du terme de rang n

```
def suite(n) :  
    u = 3  
    for i in range(n):  
        u = 4/(5-u)  
    return u
```

2) L'exécution de suite(2) renvoie 1.333333333333

Effectuer un calcul pour expliquer et vérifier cet affichage

$$\text{Il faut calculer } u_2 : u_1 = \frac{4}{5-u_0} = \frac{4}{5-3} = 2$$

$$u_2 = \frac{4}{5-u_1} = \frac{4}{5-2} = \frac{4}{3} = 1,333...$$

Exercice 2

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1} \end{cases}$

1) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$

initialisation $n = 1$

$$u_1 = \sqrt{2u_0 - 1} = \sqrt{9} = 3 \quad u_2 = \sqrt{2u_1 - 1} = \sqrt{5}$$

on a donc $1 \leq u_2 \leq u_1 \leq 3$ donc la relation est vraie au rang 1

SQ il existe n tel que $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$

DQ $1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 3$

On sait que $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$

$$2 \leq 2u_{n+1} \leq 2u_n \leq 6$$

$$1 \leq 2u_{n+1} - 1 \leq 2u_n - 1 \leq 5$$

$$1 \leq \sqrt{2u_{n+1} - 1} \leq \sqrt{2u_n - 1} \leq \sqrt{5} \text{ on conserve l'ordre car la fonction racine est croissante sur } \mathbb{R}^+$$

D'où

$$1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq \sqrt{5} \leq 3$$

La relation est donc héréditaire or elle est vraie au rang 1 donc elle est vraie pour tout $n \geq 1$

2) Que peut-on en déduire ?

On peut en déduire que la suite est décroissante à partir du rang 1 ($u_{n+1} \leq u_n$)

et bornée par 1 et 3

Exercice 3

Dans une usine, un four cuit des céramiques à la température de 1000 °C . A la fin de la cuisson, il est éteint et il refroidit. On s'intéresse à la phase de refroidissement du four qui débute à l'instant où il est éteint.

La température du four est exprimée en degré Celsius

La porte du four peut être ouverte sans risque pour les céramiques dès que sa température est inférieure à 70°C. Sinon les céramiques risquent de se fissurer, voire de casser.

Pour un nombre entier naturel n , on note T_n la température en degré Celsius du four au bout de n heures écoulées à partir de l'instant où il a été éteint. On a donc $T_0 = 1000^\circ\text{C}$ et on donne :

$$T_{n+1} = 0,82T_n + 3,6$$

1) Calculer la température du four, arrondie à l'unité, au bout de 4 heures de refroidissement

On veut T_4 donc $T_1 = 0,82 \times 1000 + 3,6 = 824$ $T_2 = 678,952$ $T_3 = 560$ $T_4 = 463$

2) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $T_n \geq 20$.

Comment peut-on interpréter ce résultat ?

Initialisation $n = 0$

$$T_0 = 1000 \geq 20 \text{ relation vraie au rang } 0$$

SQ il existe n tel que $T_n \geq 20$. et DQ $T_{n+1} \geq 20$

On sait que $T_n \geq 20$

$$0,82T_n \geq 0,82 \times 20$$

$$0,82T_n + 3,6 \geq 20$$

$$T_{n+1} \geq 20$$

La relation est donc héréditaire or elle est vraie au rang 0 donc elle est vraie pour tout $n \geq 0$

On peut interpréter en disant que le four ne descend jamais en dessous de 20 ° C

3) Soit (v_n) la suite définie pour tout entier n par $v_n = T_n - 20$

a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,82

$$v_{n+1} = T_{n+1} - 20 = 0,82T_n + 3,6 - 20 = 0,82\left(T_n - \frac{16,4}{0,82}\right) = 0,82(T_n - 20) = 0,82v_n$$

(v_n) est donc géométrique de raison 0,82 de premier terme $v_0 = T_0 - 20 = 980$

b) En déduire que $T_n = 980 \times 0,82^n + 20$

On a donc $v_n = v_0 \times q^n = 980 \times 0,82^n$ d'où $T_n = v_n + 20 = 980 \times 0,82^n + 20$

4) Au bout de combien d'heures le four peut-il être ouvert sans risque pour les céramiques ?

On répondra à cette question à l'aide de la calculatrice en expliquant le raisonnement

On programme la calculatrice et on observe l'évolution des termes de la suite . On cherche à avoir une température inférieure à 70 ° . On constate que $T_{14} = 80,9$ et $T_{15} = 69,938$ donc il faut attendre 15 heures