DS equations différentielles TB   Vendredi 4 avril 2025

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur ℝ par f(x) = $\frac{9}{2}e^{-2x} - 3e^{-3x}$

Soit l'équation différentielle (E) : $y'+2y=3e^{-3x}$

1) Résoudre l'équation différentielle (E'): $y'+2y=0$

Les solutions de (E') sont de la forme : f(x) = Ce^{-2x} avec C ∈ ℝ .

2) En déduire que h définie sur ℝ par h(x) = $\frac{9}{2}e^{-2x}$ est solution de (E')

En prenant C = 9/2, on a bien h solution de (E')

3) Vérifier que g définie sur ℝ par g(x) = $-3e^{-3x}$ est solution de (E)

$g'(x) = 9e^{-3x}$ donc g'+2g = $9e^{-3x} - 6e^{-3x} = 3e^{-3x}$ donc g est une solution particulière de (E)

4) En déduire les solutions de (E)

D'après le courS, les solutions de (E) sont de la forme $Ce^{-2x} + g(x)$

Exercice 2

Partie A Soit f la fonction définie sur ℝ par f(x) = $\frac{3e^{\frac{x}{4}}}{2+e^{\frac{x}{4}}}$

1) Démontrer que f(x) = $\frac{3}{1+2e^{-\frac{x}{4}}}$

$$\frac{3}{1+2e^{-\frac{x}{4}}} = \frac{3}{1+\frac{2}{e^{\frac{x}{4}}}} = \frac{3}{\frac{e^{\frac{x}{4}}+2}{e^{\frac{x}{4}}}} = \frac{3e^{\frac{x}{4}}}{2+e^{\frac{x}{4}}} = f(x)$$

2) Etudier les limites de f en +∞ et en -∞

ces limites sont faciles avec la forme de la question précédente

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

3) Etudier les variations puis dresser le tableau de variations de f

$$f'(x) = \frac{\frac{3}{4}e^{\frac{x}{4}}\left(2+e^{\frac{x}{4}}\right) - 3e^{\frac{x}{4}} \times \frac{1}{4}e^{\frac{x}{4}}}{\left(2+e^{\frac{x}{4}}\right)^2} = \frac{\frac{3}{2}e^{\frac{x}{4}}}{\left(2+e^{\frac{x}{4}}\right)^2}$$

tout est positif donc f est croissante sur ℝ + tab de variation.

Partie B

1) (E_1) : $y' = \frac{y}{4}$.

a) Résoudre l'équation différentielle (E_1)

Les solutions sont de la forme g(t) = $Ce^{\frac{x}{4}}$

b) Déterminer l'expression de g(t) lorsque, à la date t = 0, la population comprend 100 rongeurs, c'est à dire $g(0) = 1$

g(0) = 1 donc C*1=1 d'où C = 1 et g(t) = $e^{\frac{t}{4}}$

c) Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?

On veut g(t) > 3 cad $e^{\frac{t}{4}} > 3$

$$\frac{t}{4} > \ln(3)$$

$$t > 4\ln(3) \approx 4{,}39$$

il faudra donc attendre 5 ans

2) En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On notera u(t) le nombre de rongeurs vivants au temps t (exprimé en années) dans cette région et on admet que la fonction u, ainsi définie, satisfait aux conditions :

$$(E_2) \quad : \begin{cases} u'(t)=\dfrac{u(t)}{4}-\dfrac{u^2(t)}{12} \\ u(0)=1 \end{cases} \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}^{+*}.$$

a) On suppose que u ne s'annule pas pour t > 0 .

Soit la fonction h définie sur [0;+∞[par h = $\dfrac{1}{u}$.

Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si et seulement si la fonction h satisfait aux conditions :

$$(E_3) \quad \begin{cases} h'(t)=-\dfrac{1}{4}h(t)+\dfrac{1}{12} \\ h(0)=1 \end{cases} \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}^{+*}.$$

h(t) = $\dfrac{1}{u(t)}$ donc h(0) = 1 si et seulement si u(0) = 1 la condition initiale est vérifiée

Démontrons alors que $u'=\dfrac{u}{4}-\dfrac{u^2}{12}$ si et seulement si $h'=-\dfrac{1}{4}h+\dfrac{1}{12}$

h = $\dfrac{1}{u}$ donc $h' = -\dfrac{u'}{u^2}$ on a donc comme u ne s'annule pas les équivalence suivantes :

$h'=-\dfrac{1}{4}h+\dfrac{1}{12}$ ssi $-\dfrac{u'}{u^2} = -\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{12}$ ssi $-u' = u^2\left(-\dfrac{1}{4u}+\dfrac{1}{12}\right)$

ssi $-u' = -\dfrac{u}{4}+\dfrac{u^2}{12}$ ssi $u'=\dfrac{u}{4}-\dfrac{u^2}{12}$

b)Donner les solutions de l'équation différentielle $y'=-\dfrac{1}{4}y+\dfrac{1}{12}$

et en déduire l'expression de la fonction h puis celle de la fonction u.

O n a h(t) = $Ce^{-\frac{t}{4}}-\dfrac{\frac{1}{12}}{-\frac{1}{4}} = Ce^{-\frac{t}{4}}+\dfrac{1}{3}$ or h(0) = 1 ce qui donne ... C = $\dfrac{2}{3}$

d'où h(t) = $\dfrac{2e^{-\frac{t}{4}}+1}{3}$ et u(t) = $\dfrac{1}{h(t)} = \dfrac{3}{1+2e^{-\frac{t}{4}}}$

on retrouve ainsi la fonction de la partie A

c) Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudier lorsque t tend vers +∞

D'après la partie A , on sait que $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = 3$ donc la population de rongeur va se stabiliser autour de 300 rongeurs à long terme