# Bac Blanc n°1 Terminales

## Lundi 3 novembre

## 4 heures

## Calculatrice en mode examen

**Exercice 1** **(5 points)**

Une entreprise fabrique des composants pour l'industrie automobile. Ces composants sont conçus sur trois chaînes de montage numérotées de 1 à 3.

- La moitié des composants est conçue sur la chaîne n°1
- 30 % des composants sont conçus sur la chaîne n°2
- les composants restant sont conçus sur la chaîne n°3.

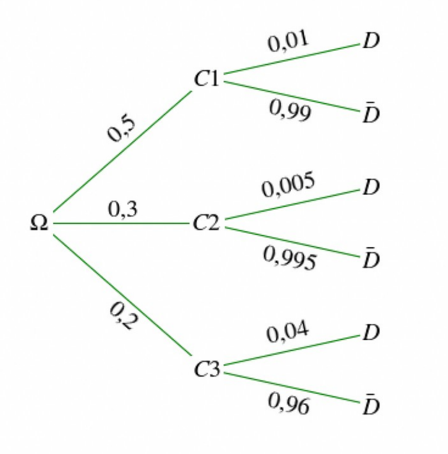
À l'issue du processus de fabrication, il apparaît que 1 % des pièces issues de la chaîne n°1 présentent un défaut, de même que 0,5 % des pièces issues de la chaîne n°2 et 4 % des pièces issues de la chaîne n°3.
On prélève au hasard un de ces composants. On note :

- C1 l'évènement « le composant provient de la chaîne n°1 »
- C2 l'évènement « le composant provient de la chaîne n°2 »
- C3 l'évènement « le composant provient de la chaîne n°3 »
- D l'évènement « le composant est défectueux »et $\overline{D}$ son évènement contraire.

*Dans tout l'exercice, les calculs de probabilité seront donnés en valeur décimale exacte ou arrondie à* $10^{-4}$ *si nécessaire.*

**PARTIE A**

**1)** Représenter cette situation par un arbre pondéré.




**2)** Calculer la probabilité que le composant prélevé provienne de la chaîne n°3 et soit défectueux.

$P(C3 \cap D) = ... = 0{,}008$

**3)** Montrer que la probabilité de l'évènement D est P(D) = 0,0145.

C1, C2 , C3 forment une partition de l'univers donc d'après la formule des proba totales, on a :

$P(D) = P(C1 \cap D) + P(C2 \cap D) + P(C3 \cap D)$

$= 0{,}005 + 0{,}0065 + 0{,}008$

$= 0{,}0145$

**4)** Calculer la probabilité qu'un composant défectueux provienne de la chaîne n°3.

On veut $P_D(C3) = \dfrac{P(D \cap C3)}{P(D)} = \dfrac{0{,}008}{0{,}0145} \approx 0{,}5517$

**PARTIE B**

L'entreprise décide de conditionner les composants produits en constituant des lots de n unités. On note X la variable aléatoire qui, à chaque lot de n unités, associe le nombre de composants défectueux de ce lot. Compte tenu des modes de production et de conditionnement de l'entreprise, on peut considérer que X suit la loi binomiale de paramètres n et p = 0,0145.

**1)** Dans cette question, les lots possèdent 20 unités. On pose n = 20.

**a)** Calculer la probabilité pour qu'un lot possède exactement trois composants défectueux.

$$P(X=3) = \binom{20}{3}\ 0{,}0145^3 \times (1-0{,}0145)^{17} \approx 0{,}0027$$

**b)** Calculer la probabilité pour qu'un lot ne possède aucun composant défectueux.

En déduire la probabilité qu'un lot possède au moins un composant défectueux.

Aucun défectueux $P(X=0) = (1-0{,}0145)^{20} \approx 0{,}7467$

au moins un : $P(X\geq 1) = 1-P(X=0) \approx 0{,}2533$

**2)** Le directeur de l'entreprise souhaite que la probabilité de n'avoir aucun composant défectueux dans un lot de n composants soit supérieure à 0,85. Il propose de former des lots de 11 composants au maximum. A-t-il raison ? Justifier la réponse.

**On veut $P(X=0) \geq 0{,}85$ donc $(1-0{,}0145)^n \geq 0{,}85$**

0,9855^n≥0,85

En prenant 11 composants au maximum, on a n = 11 d'où $0{,}9855^{11} = 0{,}8516 \geq 85$ donc le directeur a raison

**PARTIE C**

Les coûts de fabrication des composants de cette entreprise sont de 15 euros s'ils proviennent de la chaîne de montage n°1, 12 euros s'ils proviennent de la chaîne de montage n°2 et 9 euros s'ils proviennent de la chaîne de montage n°3.

Calculer le coût moyen de fabrication d'un composant pour cette entreprise.

Si on appelle Y la variable aléatoire donnant le coût de fabrication, Y peut prendre comme valeurs 15 , 12 et 9 et on a : P(Y=15) = P(C1) = 0,5  P(Y=12) = P(C2) = 0,3 et P(Y=9) = P(C3) = 0,2

d'où E(Y) = $15\times 0{,}5+12\times 0{,}3+9\times 0{,}2$ = 12,9 €

## Exercice 2 ( 4 points ) :

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. **Chaque réponse doit être justifiée**

**1) Affirmation 1** Pour tout réel x : $\dfrac{1-e^x}{1+e^x}=\dfrac{2}{1+e^{-x}}$

$$\frac{2}{1+e^{-x}} = \frac{2}{1+\frac{1}{e^x}} = \dots = \frac{2e^x}{1+e^x} \neq \frac{1-e^x}{1+e^x}$$ affirmation fausse

**2)** On considère la fonction f définie sur R par f (x) = $x^2e^{-x}$ et on note C sa courbe dans un repère orthonormé.

**Affirmation 2** L'axe des abscisses est tangent à la courbe C en un seul point.

La courbe Cf coupe l'axe des abscisses dés que f(x) = 0 c'est à dire $x^2e^{-x}=0$ ssi x = 0

d'où si l'axe des abscisses est tangent à Cf alors $f'(0) = 0$

$f'(x) = 2xe^{-x}+x^2(-e^{-x}) = (2x-x^2)e^{-x}$ d'où $f'(0)$ = ... = 0 affirmation vraie

3) On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = \frac{25+(-1)^n}{n}$

**Affirmation 3** la suite $(u_n)$ est divergente

$-1 \le (-1)^n \le 1$ **on en déduit que** $\frac{24}{n} \le u_n \le \frac{26}{n}$

**on termine avc un gendarme :** $\lim_{n \to +\infty} u_n$ **= 0 donc affirmation fausse**

4) On considère la suite $(w_n)$ définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} w_0 = 1 \\ w_{n+1} = \frac{w_n}{1+w_n} \end{cases}$

On admet que pour tout entier naturel n , $w_n > 0$.

Soit k un nombre réel strictement positif et $(t_n)$ la suite définie pour tout n par $t_n = \frac{k}{w_n}$

**Affirmation 4** La suite $(t_n)$ est une suite arithmétique strictement croissante

**arithmétique** : $t_{n+1} - t_n = \frac{k}{w_{n+1}} - \frac{k}{w_n} = \frac{k(1+w_n)}{w_n} - \frac{k}{w_n} = \frac{k+kw_n-k}{w_n} = k$

**différence constante donc suite arithmétique de raison k et comme k est strictement positif la suite est croissante donc affirmation vraie**

**<u>Exercice 3 ( 6 points)</u>** ***Les deux parties sont indépendantes***

**Partie A**On considère la fonction f définie sur IR par f(x) = $\left(x+\frac{1}{2}\right)e^{-x}+x$

1) Démontrer que $f''(x) = \left(x-\frac{3}{2}\right)e^{-x}$

$\left(x+\frac{1}{2}\right)e^{-x}$ est de la forme $u \times v$ donc on a :

$$f'(x) = 1 \times e^{-x} + \left(x+\frac{1}{2}\right) \times (-e^{-x}) + 1$$

$$= \left(\frac{1}{2}-x\right)e^{-x}+1$$

on recommence

$$f''(x) = -1 \times e^{-x} + \left(\frac{1}{2}-x\right) \times (-e^{-x})$$

$$= \left(x-\frac{3}{2}\right)e^{-x}$$

2) En déduire les variations et le minimum de la fonction $f'$

Il faut étudier le signe de $f''$ . Il dépend de celui de $x-\frac{3}{2}$ car $e^{-x}$ est strictement positif

d'où pour tout x ∈ ]-∞;3/2], $f''(x) \le 0$ et $f'$ est décroissante

pour tout x ∈ [3/2;+∞[, $f''(x) \ge 0$ et $f'$ est croissante

$f'$ étant décroissante puis croissante , elle admet un minimum en x = 3/2

qui vaut $f'\left(\frac{3}{2}\right) = -e^{-\frac{3}{2}}+1 \approx 0{,}77$

3) Justifier que, pour tout x ∈ IR , $f'(x) > 0$

on vient de voir que $f'$ admet un minimum en 3/2 et que ce minimum est positif donc pour tout x ∈ ℝ , $f'(x)>0$

**Partie B** On considère la fonction f définie sur l'intervalle ]0;+∞[ par f(x) = $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

On note $C_f$ la courbe représentative de f

1) Soit g la fonction définie sur ]0;+∞[ par g(x) = $e^{\sqrt{x}}$. Quel lien y a-t-il entre f et g ?

si on calcule $g'(x)$ on trouve $f(x)$

2) a) Démontrer que pour tout réel x de ]0;+∞[ , on a $f'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{4x\sqrt{x}}$

f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec u = $e^{\sqrt{x}}$ et v = $2\sqrt{x}$

u' = $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ et v' = $\frac{1}{\sqrt{x}}$

$$f'(x) = \frac{u'v-uv'}{v^2} = \frac{\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\times 2\sqrt{x}-\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}{4x} = \frac{e^{\sqrt{x}}-\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}{4x} = \frac{e^{\sqrt{x}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{4x} = \frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{4x\sqrt{x}}$$

b) Etudier le sens de variation de la fonction f sur ]0;+∞[ puis dresser son tableau de variation

il faut étudier le signe de $f'(x)$ , ce signe est celui de $\sqrt{x}-1$

$\sqrt{x}-1>0$

$\sqrt{x}>1$

x > 1 ( on élève au carré )

f est donc croissante sur [1;+∞[ et décroissante sur ]0;1]

+

tableau avec valeur interdite en zéro

3) On admet que f est deux fois dérivable et que $f''(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}(x-3\sqrt{x}+3)}{8x^2\sqrt{x}}$

a) En posant X = $\sqrt{x}$ , montrer que $x-3\sqrt{x}+3>0$ pour tout x de ]0;+∞[

$x-3\sqrt{x}+3 = X^2-3X+3$

Δ = 9-12 = -3 < 0 doncpas de racine le trinome est du signe de a donc positif d'où la réponse

b) Etudier alors la convexité de f

Comme $x-3\sqrt{x}+3>0$ , $f''(x)$ est positif sur ]0;+∞[ donc f est convexe

<u>**Exercice 4**</u> **(5 points)** On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0$ = 3 et, pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1}=5u_n-4n-3$$

**1. a.** Démontrer que $u_1$ = 12.

$u_1 = 5u_0-4\times 0-3 = 15-3 = 12$

**b.** Déterminer $u_2$ en détaillant le calcul.

$u_2 = 5u_1-4\times 1-3 = 60-7 = 53$

**c.** À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation ainsi que la limite de la suite $(u_n)$

La suite semble croissante et divergente vers +∞

**2. a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n>n+1$

Initialisation n=0 On $u_0$ = 3 et 0+1=1 donc $u_0 > 0+1$ la relation est vraie au rang 0

SQ il existe un entier n tel que $u_n > n+1$ DQ $u_{n+1} > n+2$

On sait que $u_n > n+1$

$$5u_n - 4n - 3 > 5(n+1) - 4n - 3$$

$$u_{n+1} > n+2$$

On termine

**b.** En déduire la limite de la suite $(u_n)$

$\lim_{n \to +\infty} n+1 = +\infty$ or $u_n > n+1$ donc d'après les th de comparaisons sur les limites, $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

**3.** On considère la suite $(v_n)$ définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - n - 1$.

**a.** Démontrer que la suite $(v_n)$ est géométrique. Donner sa raison et son premier terme $v_0$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - (n+1) - 1 \\ &= 5u_n - 4n - 3 - n - 2 \\ &= 5u_n - 5n - 5 \\ &= 5(u_n - n - 1) \\ &= 5v_n \end{aligned}$$

La suite est donc géométrique de raison 5 de premier terme $v_0 = u_0 - 0 - 1 = 2$

**b.** En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de $v_n$ en fonction de n.

$$\begin{aligned} v_n &= v_0 \times q^n \\ &= 2 \times 5^n \end{aligned}$$

**c.** En déduire que pour tout entier naturel n : $u_n = 2 \times 5^n + n + 1$.

$u_n = v_n + n + 1 = 2 \times 5^n + n + 1$.

**d.** En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)$.

Etudions le signe de $u_{n+1} - u_n$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2 \times 5^{n+1} + (n+1) + 1 - (2 \times 5^n + n + 1) \\ &= 2 \times 5^n (5-1) + 1 \\ &= 8 \times 5^n + 1 > 0 \end{aligned}$$

donc $u_{n+1} - u_n > 0$

$u_{n+1} > u_n$ $(u_n)$ est croissante

**4.** On considère la fonction ci-dessous, écrite de manière incomplète en langage Python et destinée à renvoyer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 10^7$ .

**a.** Recopier le programme et compléter les deux instructions manquantes.

```
while u < 10^7 :
    u = 5u - 4×n - 3
```

b. Quelle est la valeur renvoyée par cette fonction ?

La calculatrice donne $u_9 = 3906260 < 10^7$ et $u_{10} = 19531261 > 10^7$ donc cette fonction renvoie 10

c. Henri affirme qu'en remplaçant $10^7$ par n'importe quel autre nombre, la boucle while s'arrêtera toujours . Pourquoi a-t-il raison ? Comme la limite de la suite est +∞, d'après le cours , tout intervalle de la forme ]A+∞[ contient tous les rtermes de la suite à partir d'un certians rang donc la boucle while s'arrêtera toujours