Bac Blanc Terminale
Spécialité mathématiques

Le Jeudi 29 janvier 2026
Durée 4 heures
Calculatrice en mode examen
polynésie juin 2024 proba , Asie juin 2024 ln Métropole 2024 espace QCM perso

Exercice 1 (4 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraies ou fausse. Toute réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point

1) On considère le tableau de variations d'une fonction f définie sur IR \ {-2}

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f	5	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	1

Affirmation 1 : La droite d'équation y = -2 est une asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f

FAUX la courbe admet deux asymptotes horizontales d'équation y = 5 et y = 1 au vu des limites en ±∞

Affirmation 2 : L'équation f(x) = 4 admet une unique solution sur IR\{-2}

Sur]-2;+∞[, f admet un maximum qui vaut 4 donc l'équation f(x) = 4 n'a pas de solution sur cet intervalle
Sur]-∞;-2[f est continue et décroissante . On a f(]-∞ ;-2[)=]-∞;5[
Comme 4 ap]-∞;5[, d'après le corollaire du TVI, l'équation f(x) = 4 admet une unique solution ap]-∞ ;-2[
VRAI

Affirmation 3 : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{f(x)-5} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 5^-$ **donc** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)-5 = 0^-$ **d'où par inverse ,** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{f(x)-5} = -\infty$

Réponse FAUX

2) Soit a un nombre réel strictement négatif et f la fonction définie par f(x) = $\cos(ax)e^{ax}$.

Affirmation 4 : On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$-1 \leq \cos(ax) \leq 1$ donc $-e^{ax} \leq f(x) \leq e^{ax}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} ax = -\infty$ **(car a < 0) or** $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$ **donc par composition des limites,** $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{ax} = 0$

un th des gendarmes donne alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Réponse VRAI

Exercice 2 4 points Partie A

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois, sur les trois lancers, où la pièce est retombée du côté « Face » .

1) Préciser la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X .

il s'agit d'une loi binomiale de paramètres 3 et 1/2

2) Recopier et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X

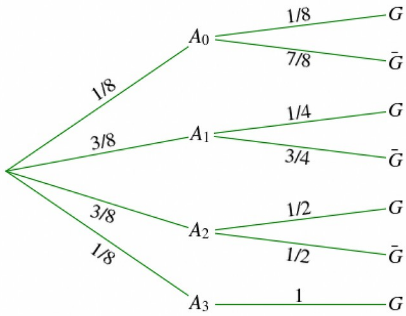
k	0	1	2	3
P(X=k)	$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$	$3\times\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Partie B

1) Démontrer que $P_{A_1}(G) = \frac{1}{4}$

dans ce cas, on relance deux piéces de monnaies qui doivent retombées sur face pour gagné on a donc $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ de gagné

2) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous



3) Démontrer que la probabilité de gagner à ce jeu est de p = $\frac{27}{64}$

proba totale : $\frac{1}{8}\times\frac{1}{8}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{8} = \frac{1}{64}+\frac{6}{64}+\frac{12}{64}+\frac{8}{64} = \frac{27}{64}$

4) Combien de fois faut-il jouer à ce jeu pour que la probabilité de gagner au moins une partie dépasse 0,95 ?

la probabilité de gagner au moins une partie est le contraire de tout perdre .

La probabilité de tout perdre est $(1-p)^n$ **on veut donc** $1-(1-p)^n>0{,}95$

$$1-\left(\frac{37}{64}\right)^n>0{,}95$$

$$\left(\frac{37}{64}\right)^n<0{,}05$$

$$n\times\ln\left(\frac{37}{64}\right)<\ln(0{,}05)$$

$$n > \frac{\ln(0{,}05)}{\ln\left(\frac{37}{64}\right)}$$

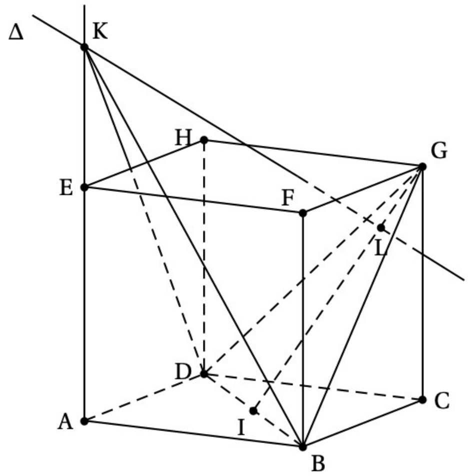
la calculatrice donne $\frac{\ln(0{,}05)}{\ln\left(\frac{37}{64}\right)}$ **≈ 5,46 donc il faut 6 parties**

Exercice 3 **5,5 points**

On considère un cube ABCDEFGH de côté 1

Le point I est le milieu du segment [BD].

On définit le point L tel que $\overrightarrow{IL}=\frac{3}{4}\overrightarrow{IG}$ et on se place dans le repère orthonormé (A ; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$)



1) a) Préciser les coordonnées des points D , B , I et G .
Aucune justification n'est demandée

$D(0;1;0)$ $B(1;0;0)$ $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$ $G(1;1;1)$

b) En utilisant le fait que $\overrightarrow{IL}=\frac{3}{4}\overrightarrow{IG}$ montrer que le point L a pour coordonnées $\left(\frac{7}{8};\frac{7}{8};\frac{3}{4}\right)$

$\overrightarrow{IL}\begin{pmatrix} x_L-\frac{1}{2} \\ y_L-\frac{1}{2} \\ z_L-0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{IG}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ On doit donc avoir : $\begin{cases} x_L-\frac{1}{2}=\frac{3}{8} \\ y_L-\frac{1}{2}=\frac{3}{8} \\ z_L=\frac{3}{4} \end{cases}$ ce qui donne L $\left(\frac{7}{8};\frac{7}{8};\frac{3}{4}\right)$

2) Soit Δ la droite passant par L et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

a) Donner une représentation paramétrique de la droite Δ $\begin{cases} x=\frac{7}{8}+t \\ y=\frac{7}{8}+t \\ z=\frac{3}{4}-t \end{cases}$ avec t ∈ ℝ

b) Montrer que les droites Δ et (AE) sont sécantes au point K de coordonnées $\left(0;0;\frac{13}{8}\right)$

La droite (AE) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=k \end{cases}$ avec k ∈ ℝ .

on cherche donc t et k tel que $\begin{cases} \frac{7}{8}+t=0 \\ \frac{7}{8}+t=0 \\ k=\frac{3}{4}-t \end{cases}$ $\begin{cases} t=-\frac{7}{8} \\ k=\frac{13}{8} \end{cases}$ d'où $\begin{cases} x_K=0 \\ y_K=0 \\ z_K=13/8 \end{cases}$

3) a) Calculer la distance KL

$\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix}\frac{7}{8}\\ \frac{7}{8}\\ \frac{3}{4}-\frac{13}{8}\end{pmatrix}$ c'est à dire $\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix}\frac{7}{8}\\ \frac{7}{8}\\ -\frac{7}{8}\end{pmatrix}$

$KL^2 = \left(\frac{7}{8}\right)^2+\left(\frac{7}{8}\right)^2+\left(-\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{147}{64}$ d'où $KL = \frac{7\sqrt{3}}{8}$

b) On admet que le triangle DBG est équilatéral et que son aire est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Calculer le volume du tétraèdre KDBG

$V = \frac{1}{3}\times B\times h = \frac{1}{3}\times aire(DBG)\times KL = \frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{7\sqrt{3}}{8} = \frac{7}{16}$

4) On désigne par a un réel de l'intervalle $]0;+\infty[$ et on note K_a le point de coordonnées $(0;0;a)$

a) Exprimer le volume V_a de la pyramide $ABCDK_a$ en fonction de a .

$$V_a = \frac{1}{3}\times aire(ABCD)\times K_aA = \frac{1}{3}\times 1\times a = \frac{a}{3}$$

b) On note Δ_a la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x=t'\\ y=t'\\ z=-t'+a\end{cases}$ où $t\in\mathbb{R}$.

Justifier que le point L_a de coordonnées $\left(\frac{a+1}{3};\frac{a+1}{3};\frac{2a-1}{3}\right)$ est un point de Δ_a

en prenant t' = $\frac{a+1}{3}$, on a $-t'+a = -\frac{a+1}{3}+a = \frac{2a-1}{3}$ on retrouve ainsi les coordonnées de L

c) On admet que la distance K_aL_a représente la hauteur de la pyramide $GDBK_a$ relative à la base BDG.

Déterminer s'il existe, un réel strictement positif a tel que le tétraèdre $GDBK_a$ et la pyramide $ABCDK_a$ sont de même volume

$\overrightarrow{K_aL_a}\begin{pmatrix}\frac{a+1}{3}\\ \frac{a+1}{3}\\ \frac{2a-1}{3}-a\end{pmatrix}$ cad $\overrightarrow{K_aL_a}\begin{pmatrix}\frac{a+1}{3}\\ \frac{a+1}{3}\\ \frac{-a-1}{3}\end{pmatrix}$

donc $K_aL_a^2 = \left(\frac{a+1}{3}\right)^2+\left(\frac{a+1}{3}\right)^2+\left(\frac{-a-1}{3}\right)^2 = \frac{3\times(a+1)^2}{9}$ donc $K_aL_a = (a+1)\times\frac{\sqrt{3}}{3}$

La pyramide KDBG a donc pour volume $\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times(a+1)\times\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a+1}{6}$

On cherche donc a tel que $\frac{a}{3} = \frac{a+1}{6}$ ce qui donne a = 1

Exercice 4 **6,5 points**

On considère la fonction f définie sur]0;+∞[par : f(x) = $x^2 - x\ln(x)$

On admet que f est deux fois dérivable sur]0;+∞[

Partie A Etude de la fonction f

1) Déterminer les limites de f en 0 et en +∞

- d'après les croissances comparées , $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ d'où comme $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ par somme $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$
- $x^2 - x\ln x = x^2(1-\frac{lnx}{x})$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et d'après les croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{\ln x}{x} = 1$

Par produit il vient : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2) Pour tout réel x strictement positif, calculer $f'(x)$ où f' désigne la dérivée de f

forme $u\times v$ pour $x\ln x$ donc $f'(x) = 2x - \left(1\times\ln(x) + x\times\frac{1}{x}\right) = 2x-1-\ln x$

3) Montrer que pour tout réel x strictement positif, $f''(x) = \frac{2x-1}{x}$

$$f''(x) = 2-\frac{1}{x} = \frac{2x-1}{x}$$

4) Etudier les variations de la fonction f' sur]0;+∞[puis dresser le tableau de variations de la fonction f' sur]0;+∞[

Il faut étudier le signe de f'' et comme on est sur]0;+∞[, ce signe dépend de 2x-1 d'où

pour x ∈ $\left]0;\frac{1}{2}\right]$, $f''(x)\le 0$ donc f' est décroissante

pour x ∈ $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$, $f''(x)\ge 0$ donc f est croissante

x	0		$\frac{1}{2}$		+∞
$f''(x)$	‖	-	0	+	
$f'(x)$	‖	$\searrow$	ln(2)	$\nearrow$	

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2\times\frac{1}{2}-1-\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2$$

on veillera à faire apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction f'

Les limites de la fonction f' aux bornes de son ensemble de définition ne sont pas attendues

5) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur]0;+∞[

D'aprés le tableau précédent, f' admet un minimum qui vaut ln2 env 0,69 qui est positif donc f' est positive sur son domaine d'où f est croissante sur]0;+∞[

Partie B Etude d'une fonction auxiliaire pour la résolution de l'équation f(x) = x

On considère la fonction g définie sur]0;+∞[par g(x) = $x-\ln(x)$

On admet que g est dérivable sur]0;+∞[et on note g' la dérivée de g

1) Pour tout réel x strictement positif , calculer $g'(x)$ puis dresser le tableau de variation la fonction g

Les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition ne sont pas demandées .

$g'(x) = 1-\frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$ le signe est celui de $x-1$ d'où

x	0		1		+∞
$g'(x)$	‖	-	0	+	
$g(x)$	‖	↘	1	↗	

2) On admet que 1 est l'unique solution de l'équation g(x) = 1

Résoudre sur l'intervalle]0;+∞[l'équation f(x) = x

$$x^2-x\ln x=x$$

comme x ≠ 0 , on peut simplifier par x d'où

$$x-\ln x=1$$

g(x) = 1

x = 1 d'après le début de la question

Partie C Etude d'une suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1}=f(u_n)=u_n^2-u_n\ln(u_n)$$

1) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$\frac{1}{2}\leq u_n\leq u_{n+1}\leq 1$$

<u>initialisation</u> $u_1 = f(u_0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}+\frac{\ln 2}{2}$ env 0,596

on a donc $1/2\leq u_0 < u_1 \leq 1$

la relation est vraie au rang 0

SQ il existe n tel que $\frac{1}{2}\leq u_n\leq u_{n+1}\leq 1$

DQ $\frac{1}{2}\leq u_{n+1}\leq u_{n+2}\leq 1$

On travaille sur $\left[\frac{1}{2};1\right]$ or f est croissante sur cet intervalle donc elle conserve l'ordre

d'où comme on suppose $\frac{1}{2}\leq u_n\leq u_{n+1}\leq 1$ on peut appliquer f : $f\left(\frac{1}{2}\right)\leq f(u_n)<f(u_{n+1})\leq f(1)$

f(1/2) = $\frac{1}{4}+\frac{\ln 2}{2}$ env 0,596 et f(1) = 1 donc la relation est vérifiée $\frac{1}{2}\leq u_{n+1}\leq u_{n+2}\leq 1$

On conclut la récurrence

2) Justifier que la suite (u_n) converge

on vient de voir que $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ ce qui permet d'affirmer que la suite est croissante et majorée par 1 donc d'après les th de convergences monotones , la suite converge

On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$

3) Déterminer la valeur de ℓ .

D'apèrs la partie B question 2 f(x) = x a pour solution 1 donc la limite vaut 1