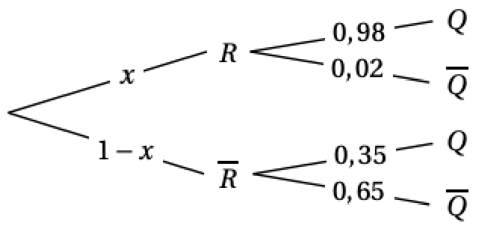
EXERCICE 1 **5 points**

Puisque l'on interroge un étudiant au hasard, on est en situation d'équiprobabilité, et les proportions sont assimilables à des probabilités.

1. Comme 91,7 % des étudiants ont répondu oui, on a donc $P(Q) = 0,917$.

   Et $P_{\overline{R}}\left(\overline{Q}\right) = 0,65$, cela correspond à la probabilité que le candidat interrogé ait répondu « non », sachant qu'il a échoué à l'examen.

2. **a.** L'arbre pondéré complété est :



   b. On sait que $P(Q) = 0,917$, or, comme R et $\overline{R}$ partitionnent l'univers, en vertu de la loi des probabilités totales, on a également :

$$\begin{aligned}P(Q) &= P\left(Q \cap R\right) + P\left(Q \cap \overline{R}\right)\\ &= x \times 0,98 + (1-x) \times 0,35\\ &= 0,98x + 0,35 - 0,35x\\ &= 0,63x + 0,35\end{aligned}$$

   Puisque la probabilité de Q est unique, on peut donc écrire, puis résoudre l'équation : $0,63x + 0,35 = 0,917 \iff 0,63x = 0,567$

$$\iff x = \frac{0,567}{0,63}$$

$$\iff x = 0,9$$

   La solution de l'équation est donc 0,9 : la probabilité que l'étudiant ait réussi son examen est donc de 0,9 (ou bien : 90 % des étudiants ont réussi leur examen).

3. Pour cette question, on doit calculer $P_Q(R)$.

   On a : $P_Q(R) = \dfrac{P(Q \cap R)}{P(Q)} = \dfrac{0,9 \times 0,98}{0,917} = \dfrac{0,882}{0,917} = \dfrac{126}{131} \approx 0,962$

   Si l'étudiant interrogé a répondu « oui » à la question, la probabilité qu'il ait réussi l'examen est d'environ 0,962 (à 10^{-3} près).

   C'est-à-dire qu'environ 96,2 % des étudiants ayant répondu « oui » ont effectivement réussi l'examen.

4. Par exploration à la calculatrice, avec une loi binomiale de paramètres $(20 ; 0,615)$, on a : $P(N \geqslant 11) \approx 0,797$, et $P(N \geqslant 12) \approx 0,649$.

   En choisissant de récompenser les candidats dont la note est supérieure ou égale à 11, la directrice récompensera environ 80 % d'eux.

EXERCICE 2 7 points **Thèmes : probabilités**

Les douanes s'intéressent aux importations de casques audio portant le logo d'une certaine marque. Les saisies des douanes permettent d'estimer que :

- 20 % des casques audio portant le logo de cette marque sont des contrefaçons ;
- 2 % des casques non contrefaits présentent un défaut de conception ;
- 10 % des casques contrefaits présentent un défaut de conception.

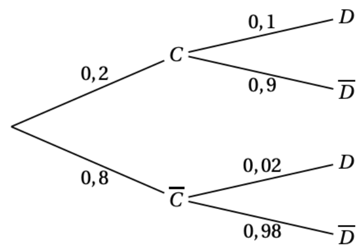
L'agence des fraudes commande au hasard sur un site internet un casque affichant le logo de la marque. On considère les évènements suivants :

- C : « le casque est contrefait » ;
- D : « le casque présente un défaut de conception » ;
- $\overline{C}$ et $\overline{D}$ désignent respectivement les évènements contraires de C et D.

Dans l'ensemble de l'exercice, les probabilités seront arrondies à 10^{-3} si nécessaire.

Partie 1

1. Calculer $P(C \cap D)$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
   Soit l'arbre pondéré suivant :



   On a $P(C \cap D) = P(C) \times P_C(D) = 0,2 \times 0,1 = 0,02$.

2. Démontrer que $P(D) = 0,036$.
   C et $\overline{C}$ forment une partition de l'univers, d'après les probabilités totales,
   $P(D) = p(C \cap D) + P\left(\overline{C} \cap D\right) = 0,2 \times 0,1 + 0,8 \times 0,02 = 0,02 + 0,016 = 0,036$.

3. Le casque a un défaut. Quelle est la probabilité qu'il soit contrefait ?
   On cherche $P_D(C) = \dfrac{P(D \cap C)}{P(D)} = \dfrac{0,02}{0,036} = \dfrac{5}{9} \approx 0,556$.

Partie 2

On commande n casques portant le logo de cette marque. On assimile cette expérience à un tirage aléatoire avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de casques présentant un défaut de conception dans ce lot.

1. Dans cette question, $n = 35$.

   a. Justifier que X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,\ p)$ où $n = 35$ et $p = 0,036$.
   Comme l'expérience est assimilé à un tirage avec remise, on peut considérer que les 35 tirages sont indépendants. Le succès est le casque a un défaut de conception, soit la probabilité $p = 0,036$. On a bien une loi binomiale de paramètre $n = 35$ et $p = 0,06$

   b. Calculer la probabilité qu'il y ait parmi les casques commandés, exactement un casque présentant un défaut de conception.
   On cherche $P(X = 1) = \binom{35}{1} 0,036^1 \times (1 - 0,036)^{35} \approx 0,362$

   c. Calculer $P(X \leqslant 1)$.
   $P(X \leqslant 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = (1,036)^{35} + \binom{35}{1} 0,036^1 \times (1 - 0,036)^{35} \approx 0,639$.

2. Dans cette question, n n'est pas fixé.
   Quel doit être le nombre minimal de casques à commander pour que la probabilité qu'au moins un casque présente un défaut soit supérieur à 0,99 ?
   On veut $P(Y \geq 1) > 0,99 \iff 1 - P(Y = 0) > 0,99 \iff (1 - 0,036)^n < 0,01 \iff n \ln(0,964) < \ln(0,01) \iff n > \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,964)} \iff n > 125,6$ donc il faut commander au moins 126 casques.