Interrogation Terminale
Fonctions trigonométriques

__Exercice __1

a) Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses. On justifiera chaque réponse

Affirmation 1 : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x(3+\cos x) = +\infty$

$-1 \leq \cos(x) \leq 1$ donc $2 \leq 3+\cos(x) \leq 4$ et $2e^x \leq e^x(3+\cos(x)) \leq 4e^x$ on termine avec un th de comparaison ou du gendarme

Réponse VRAIE

Affirmation 2 : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{\cos x}{\cos x - 1} = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \cos x - 1 = 0^-$ donc la limite est $-\infty$ d'où Réponse FAUSSE

b) Soit x un réel de $]-\pi;+\pi]$. Résoudre l'inéquation $1+2\sin x > 0$

L'inéquation est équivalente à $\sin(x) > \dfrac{-1}{2}$. Un cercle trigo donne alors S = $\left]-\pi;-\dfrac{5\pi}{6}\right[\cup \left]-\dfrac{\pi}{6};\pi\right]$

__Exercice 2__

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sin x}{2+\cos x}$ où x désigne un réel .

On note C sa courbe représentative dans un repère

1) Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}$ c'est à dire que, pour tout réel x, le dénominateur $2+\cos x$ ne s'annule jamais

   $2+\cos(x)=0$ donne $\cos(x)=-2$ or un cosinus est compris entre -1 et 1 donc pas de solution

2) a) Démontrer que f est périodique de période 2π

   $f(x+2\pi) = \dfrac{\sin(x+2\pi)}{2+\cos(x+2\pi)}$ or on sait que $\sin(x+2\pi)=\sin(x)$ et $\cos(x+2\pi)=\cos(x)$ donc

   $f(x+2\pi) = \dfrac{\sin x}{2+\cos x}$ = f(x)

   b) Démontrer que f est impaire. Que peut-on en déduire pour la courbe C ?

   le domaine de définition est symétrique par rapport à l'origine et

   $f(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{2+\cos(-x)}$ **or** $\sin(-x)=-\sin(x)$ **et** $\cos(-x)=\cos(x)$ **donc**

   $f(-x) = \dfrac{-\sin x}{2+\cos x} = -f(x)$ **donc f est impaire**

   La courbe C est donc symétrique par rapport à l'origine du repére

   c) A l'aide des deux questions précédentes, démontrer qu'il suffit d'étudier f sur $[0;\pi]$

   f est 2π périodique donc on peut l'étudier sur une période $]-\pi;+\pi]$

   f est impaire donc on peut l'étudier sur une demi période $[0;\pi]$

3) a) Démontrer que pour tout réel x, $f'(x)=\dfrac{1+2\cos x}{(2+\cos x)^2}$

facile

b) Etudier le signe de f' sur $[0;\pi]$

$(2+\cos x)^2$ est positif donc le signe de f' est celui de 1+2cos(x)

1+2cos(x)>0 est équivalent à $\cos(x)>\dfrac{-1}{2}$ donc avec un cercle trigo on trouve

x $\in \left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right[$ d'où

f' est positive sur $\left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right[$ donc f est croissante

f' est n égative sur $\left[\dfrac{2\pi}{3};\pi\right]$ donc f est décroissante

c) Dresser le tableau de variation de f sur $[0;\pi]$

$$f(0)=\frac{\sin 0}{2+\cos 0}=0 \qquad f(\pi)=\frac{\sin \pi}{2+\cos \pi}=0 \qquad f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{2+\cos\frac{2\pi}{3}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	↘	0