DS Suite et récurrence Spécialité Mathématique Terminale

Mardi 15 septembre 2026

Exercice 1

En mai 2020, une entreprise fait le choix de développer le télétravail afin de s'inscrire dans une démarche écoresponsable. Elle propose à ses 5 000 collaborateurs en France de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise.

En mai 2020, seuls 200 d'entre eux ont choisi le télétravail. Chaque mois, depuis la mise en place de cette mesure, les dirigeants de l'entreprise constatent que 85 % de ceux qui avaient choisi le télétravail le mois précédent choisissent de continuer, et que, chaque mois, 450 collaborateurs supplémentaires choisissent le télétravail. On modélise le nombre de collaborateurs de cette entreprise en télétravail par la suite (a_n). Le terme a_n désigne ainsi une estimation du nombre de collaborateurs en télétravail le n-ième mois après le mois de mai 2020. Ainsi $a_0 = 200$.

Partie A

1. Calculer a_1 .

$a_1 = 200\times0{,}85+450 = 620$

2. a) Justifier que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}85a_n+450$.

Facile

b) Démontrer par récurrence que la suite (a_n) est majorée par 3000

Il faut démontrer que pour tout entier naturel n , $u_n \leq 3000$

Init : n = 0 $u_0 = 200 \leq 3000$ la propriété est vérifiée au rang 0

SQ il existe un entier n tel que $u_n \leq 3000$ DQ $u_{n+1} \leq 3000$

On sait que $u_n \leq 3000$

$0{,}85u_n \leq 0{,}85*3000 = 2550$

$0{,}85u_n+450 \leq 2550+450$

$u_{n+1} \leq 3000$

La propriété est donc héréditaire or elle est vraie au rang 0 donc

pour tout entier naturel n , $u_n \leq 3000$

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = a_n - 3000$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,85 dont on précisera le premier terme

$v_{n+1} = a_{n+1} - 3000$

$v_{n+1} = 0{,}85a_n+450 - 3000 = 0{,}85a_n - 2550$

$v_{n+1} = 0{,}85\left(a_n - \frac{2550}{0{,}85}\right)$

$v_{n+1} = 0{,}85(a_n - 3000)$

$v_{n+1} = 0{,}85v_n$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison 0,85 de premier terme $v_0 = a_0 - 3000 = -2800$

b. Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

$v_n = v_0 \times q^n = -2800\times0{,}85^n$

c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $a_n = -2800\times0{,}85^n+3000$

$v_n = -2800\times0{,}85^n$

$a_n - 3000 = -2800\times0{,}85^n$

$a_n = -2800\times0{,}85^n+3000$

4. A l'aide de votre calculatrice, déterminer le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2 500, après la mise en place de cette mesure dans l'entreprise.

La calculatrice donne $a_{10} \approx 2448$ et $a_{11} \approx 2531$ donc au bout de onze mois

Partie B

Afin d'évaluer l'impact de cette mesure sur son personnel, les dirigeants de l'entreprise sont parvenus à modéliser le nombre de collaborateurs satisfaits par ce dispositif à l'aide de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{5u_n+4}{u_n+2}$ où u_n désigne le nombre de milliers de collaborateurs satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de n mois après le mois de mai 2020.

1. Démontrer que la fonction f définie pour tout x ∈ [0 ; +∞[par f (x) = $\dfrac{5x+4}{x+2}$ est strictement croissante sur [0 ; +∞[.

$f'(x) = \dfrac{5(x+2)-(5x+4)\times 1}{(x+2)^2} = \dfrac{6}{(x+2)^2} > 0$ donc f est croissante

2. a. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.

Init : n = 0

$u_0 = 1$ $u_1 = \dfrac{5u_0+4}{u_0+2} = \dfrac{9}{3} = 3$ **donc** $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 4$

La relation est vraie au rang 0

SQ il existe un entier n tel que $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$

DQ $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4$

On sait que $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$

or la fonction f est croissante sur [0;+∞[donc

$$f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq 4$$

Or f(0) = 4/2 = 2 et f(4) = 24/6 = 4 d'où

$$0 \leq 2 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4$$

La propriété est donc héréditaire or elle est vraie au rang 0 donc
pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$

b. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

On a $u_n \leq u_{n+1}$ donc la suite est croissante

3. A l'aide de votre calculatrice, conjecturer la limite de la suite (u_n) et l'interpréter dans le contexte de la modélisation.

La suite semble avoir pour limite 3 donc le nombre de télétravailleur va se stabiliser en dessous de 3000

Exercice 2 L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse . On justifiera la réponse

On considère la suite (w_n) définie par $w_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par : $w_{n+1} = w_n + 2n + 3$

Affirmation pour tout entier naturel n , $w_n = (n+1)^2$

Init : n = 0 $(0+1)^2 = 1^2 = 1 = u_0$ donc la propriété est vraie au rang 0

SQ il existe un entier n tel que $w_n = (n+1)^2$

DQ $w_{n+1} = (n+2)^2$

On sait que $w_n = (n+1)^2$ donc

$w_n + 2n + 3 = (n+1)^2 + 2n + 3$

$w_{n+1} = n^2 + 2n + 1 + 2n + 3$

$w_{n+1} = n^2 + 4n + 4$

$w_{n+1} = (n+2)^2$

La propriété est donc héréditaire or elle est vraie au rang 0 donc

pour tout entier naturel n , $w_n = (n+1)^2$

L'affirmation est donc vraie