Les suites arithmético-géométriques

Une suite arithmético-géométrique est une suite définie par la relation de récurrence :

$u_{n+1} = au_n + b$ où a et b sont des réels

A noter : si a = 1 , la suite est arithmétique
si b = 0 , la suite est géométrique

Dans la suite on suppose donc a ≠ 1 et b ≠ 0

1) Pour trouver la forme explicite d'une telle suite , on cherche le point fixe de la suite c'est à dire la valeur de ℓ tel que : ℓ = a ℓ + b ce qui donne : $\ell = \frac{b}{1-a}$

2) On introduit alors la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \ell$.

On démontre que (v_n) est une suite géométrique :

$v_{n+1} = u_{n+1} - \ell$.

$v_{n+1} = au_n + b - \ell$.

or on sait que ℓ = a ℓ + b donc

$v_{n+1} = au_n + b - (a\ell + b)$

$v_{n+1} = a(u_n - \ell)$

$v_{n+1} = a\, v_n$

(v_n) est donc géométrique de raison a de premier terme $v_0 = u_0 - \ell$.

3) On a alors $v_n = v_0 \times a^n$

$v_n = (u_0 - \ell)\, a^n$

d'où $u_n - \ell = (u_0 - \ell)\, a^n$

$u_n = (u_0 - \ell)\, a^n + \ell$

Exemple $\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = -3u_n + 8 \end{cases}$

1) Vérifier que le point fixe est $\ell = 2$

2) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 2$

Démontrer que (v_n) est géométrique de raison -3 de premier terme $v_0 = u_0 - 2 = 5$

3) on a donc $v_n = 5 \times (-3)^n$ d'où $u_n = 5 \times (-3)^n + 2$