

Chapitre 4 : Equation polynomiale

I- Le binome de Newton

II- Factorisation

1) Le cas du second degré

2) Cas général

a) Définition d'un polynôme de degré n

b) Factorisation par $z - a$

c) Nombre de racine d'un polynôme

I- Le binome de Newton

Propriété Soit n un entier naturel

Quelques soient les nombres complexes a et b, on a : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Exemple

$$(1+i)^3 = \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} 1^k i^{3-k} = \binom{3}{0} 1^0 i^{3-0} + \binom{3}{1} 1^1 i^{3-1} + \binom{3}{2} 1^2 i^{3-2} + \binom{3}{3} 1^3 i^{3-3} = i^3 + 3i^2 + 3i + 1 = -i - 3 + 3i + 1 = -2 + 2i$$

II- Factorisation

1) Le cas du second degré

Factorisation d'un polynôme du second degré

Soient a , b et c trois réels avec $a \neq 0$

On considère le polynôme P tel que pour tout z de $\mathbb{C}$, on ait $P(z) = az^2 + bz + c$

On note z_1 et z_2 les racines dans $\mathbb{C}$ de P avec éventuellement $z_1 = z_2$

Alors P peut se factoriser sous la forme $P(z) = a(z - z_1)(z - z_2)$

Soit $P(Z) = 2Z^2 + 2Z + 5$

$\Delta = 4 - 4 \times 2 \times 5 = -36 < 0$ donc deux racines z_1 et z_2 dans $\mathbb{C}$

on a : $z_1 = \frac{-1-3i}{2}$ et $z_2 = \frac{-1+3i}{2}$

donc le polynôme $P(z) = 2z^2 + 2z + 5$ ci-dessus peut donc se factoriser sous la forme :

$$P(z) = 2 \left(z - \frac{-1-3i}{2} \right) \left(z - \frac{-1+3i}{2} \right) = (2z + 1 + 3i) \left(z + \frac{1-3i}{2} \right)$$

2) Cas général

a) Définition d'un polynôme de degré n

Définitions

- Soient $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ des réels (éventuellement complexes) avec $a_n \neq 0$.
Une fonction polynôme de degré n est une fonction définie sur $\mathbb{C}$ qui admet une écriture unique, sous la forme :
$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k z^k$$
- Le polynôme nul est le polynôme P tel que pour tout nombre complexe : $P(z) = 0$
- On appelle **racine d'un polynôme** tout complexe z_0 tel que $P(z_0) = 0$

Propriété (admise)

Un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls

b) Factorisation par $z - a$

Théorème Soit n un entier naturel non nul et a un nombre complexe.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$z^n - a^n = (z - a)Q(z) \text{ avec } Q \text{ polynôme et } \deg Q = n-1$$

Démonstration voir activité

On peut retenir la forme du polynôme $Q(z) = z^{n-1} + az^{n-2} + a^2 z^{n-3} + \dots + a^{n-2}z + a^{n-1}$

Exemple Compléter : $z^3 - 8 =$
 $z^6 - 64 =$

Théorème Soit P un polynôme de degré n qui admet pour **racine a**.

P se factorise par $z - a$ et on a : $P(z) = (z - a)Q(z)$ avec $\deg Q = n - 1$

Démonstration voir activité

Exemple Soit $P(z) = z^3 + z^2 + 2z - 4$

- 1 est une racine de P. En effet, $P(1) = 1^3 + 1^2 + 2 \times 1 - 4 = 0$
- le polynôme P se factorise donc par $z - 1$: $P(z) = (z - 1)(az^2 + bz + c)$

On trouve alors les coefficients de a, b et c par identification :

$$P(z) = az^3 + bz^2 + cz - az^2 - bz - c = az^3 + (b - a)z^2 + (c - b)z - c$$

En identifiant les coefficients, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 1 \\ c - b = 2 \\ -c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 4 \end{cases}$$

d'où $P(z) = (z - 1)(z^2 + 2z + 4)$

- $P(z)=0 \Leftrightarrow z=1 \text{ ou } z^2+2z+4=0$

$\Delta=4-16=-12<0$ donc deux racines complexes : $z_1=\frac{-2-i\sqrt{12}}{2}$ et $z_2=\frac{-2+i\sqrt{12}}{2}$

c'est à dire $z_1=-1-i\sqrt{3}$ et $z_2=-1+i\sqrt{3}$

$$S = \{1 ; -1-i\sqrt{3} ; -1+i\sqrt{3}\}$$

c) Nombre de racines d'un polynôme

Théorème Un polynôme non nul de degré n admet au plus n racines

Démonstration :

Une démonstration qui se fait par récurrence :

Soit la propriété (P_n) : un polynôme P de degré n admet au plus n racines

Initialisation : Si $n = 1$, $P(z)=az+b$ a au plus une solution donc propriété vraie au rang 1

SQ il existe un entier n pour lequel (P_n) est vraie

DQ alors que (P_{n+1}) est vraie c'est à dire que si P est un polynôme de degré $n+1$ alors il admet au plus $n+1$ racines

- Si P n'a pas de racine alors la propriété est vraie car le polynôme a au plus $n + 1$ racines
- Si P admet une racine notée a alors on peut le factoriser par $z-a$: $P(z)=(z-a)Q(z)$ avec Q polynôme de degré n . D'après l'hypothèse de récurrence, Q admet au plus n racines donc P admet donc au plus $n+1$ racines (les n racines éventuelles de Q + le complexe a)
Ainsi la propriété est héréditaire
- **Conclusion** : comme la propriété est vraie au rang 1, par hérédité, elle est vraie pour $n \geq 1$