

Chapitre 5 : Les suites de matrices

I- Suite de matrices

a) Définition

b) Système fermé

II- Les suites arithmético géométriques

I- Suite de matrices

a) Définition

Définition Soit (U_n) une suite de matrices colonnes de premier terme U_0 et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$ où A est une matrice carrée.

L'expression de U_n en fonction de n et de U_0 est alors : $U_n = A^n U_0$

Remarque La suite U_n est donc une suite géométrique de matrices colonnes.

On la rencontre dans l'évolution d'un système fermé. Pour connaître l'expression de U_n en fonction de n , on cherchera à diagonaliser la matrice A .

b) Exemple de système fermé

Enoncé

Dans une enceinte une population d'êtres unicellulaires ne peuvent se trouver que dans deux états A ou B. On désigne par a_n et b_n les effectifs des deux états, en milliers d'individus à l'instant n . On a constaté que 95 % des unicellulaires se trouvant à l'instant n dans l'état A n'ont pas changé d'état à l'instant $n+1$, ainsi que 80 % de ceux se trouvant à l'instant n dans l'état B.

L'effectif total est de 500 000 individus. Cet effectif reste constant dans le temps.

- 1) Déterminer le système donnant a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n
- 2) Écrire une fonction $U(a,n)$ en Python donnant les populations, en milliers d'individus, des états A et B en fonction de a_0 et n .

Que renvoie la fonction pour (375,30), (50,30), (500,30) ?

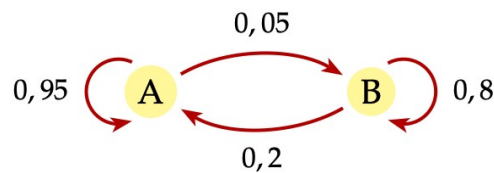
Conjecturer l'évolution des populations a_n et b_n sur le long terme.

- 3) Traduire le système de la question 1) à l'aide d'une suite (U_n) de matrices colonnes. En déduire U_n en fonction n et de U_0 correspondant à l'état initial.

4) On donne
$$\begin{pmatrix} 0,95 & 0,2 \\ 0,05 & 0,8 \end{pmatrix}^n = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4+0,75^n & 4-4 \times 0,75^n \\ 1-0,75^n & 1+4 \times 0,75^n \end{pmatrix}$$

Exprimer a_n et b_n en fonction de n et de a_0 . Démontrer alors votre conjecture.

1) On peut écrire d'après l'évolution proposée : $\begin{cases} a_{n+1}=0,95a_n+0,2b_n \\ b_{n+1}=0,05a_n+0,8b_n \end{cases}$



2) Sachant que $b_n = 500 - a_n$, on peut proposer comme fonction python :

```

def U(a,n):
    b=500-a
    for i in range(n):
        a=0.95*a+0.2*b
        b=500-a
    return a,b
  
```

On obtient alors :

$$U(375, 30) = (400, 00 ; 100, 00)$$

$$U(50, 30) = (399, 94 ; 100, 06)$$

$$U(500, 30) = (400, 02 ; 99, 98)$$

On peut donc conjecturer que, sur le long terme, la répartition des populations A et B semble se stabiliser vers la répartition 400 pour A et 100 pour B quelque soit l'état initial.

3) On pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,2 \\ 0,05 & 0,8 \end{pmatrix}$

$$\text{On a donc } U_{n+1} = AU_n$$

La suite est donc géométrique de raison A de premier terme U_0 d'où $U_n = A^n U_0$.

4) L'énoncé donne la matrice A^n , on peut donc en déduire U_n :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4+0,75^n & 4-4 \times 0,75^n \\ 1-0,75^n & 1+4 \times 0,75^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4a_0+0,75^n a_0+4b_0-4(0,75^n)b_0 \\ a_0-0,75^n a_0+b_0+4(0,75^n)b_0 \end{pmatrix}$$

En remplaçant $b_0 = 500 - a_0$, on obtient alors :

$$a_n = \frac{4}{5}a_0 + \frac{0,75^n}{5}a_0 + 400 - \frac{4}{5}a_0 - 400(0,75^n) + \frac{4(0,75^n)}{5}a_0 = 0,75^n(a_0 - 400) + 400$$

$$b_n = \frac{1}{5}a_0 - \frac{0,75^n}{5}a_0 + 100 - \frac{1}{5}a_0 + 400(0,75^n) - \frac{4(0,75^n)}{5}a_0 = 0,75^n(400 - a_0) + 100$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,75^n = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 400 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 100.$$

les suites (a_n) et (b_n) convergent, quelque soit l'état initial, vers les valeurs respectives de 400 et 100 soit respectivement 400 000 et 100 000 cellules.

II- Les suites arithmético géométriques $U_{n+1} = AU_n + B$

On définit la suite de matrices (U_n) par $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $U_{n+1} = AU_n + B$

avec $A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ -0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

1) Déterminer la matrice $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ telle que $X = AX + B$

2) On définit la suite de matrice (V_n) par $V_n = U_n - X$

a) Montrer que pour tout entier n , on a $V_{n+1} = AV_n$

b) En déduire U_n en fonction de A et n

3) On donne $A^n = \begin{pmatrix} 0,5^n & 0 \\ -n0,5^n & 0,5^n \end{pmatrix}$ Déterminer l'expression de U_n en fonction de n

1) Deux méthodes pour déterminer X

Méthode 1 $X = AX + B$ donc on résout $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ -0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

cela donne le système suivant : $\begin{cases} x = 0,5x + 2 \\ y = -0,5x + 0,5y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases}$

d'où $X = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

Méthode 2 $X = AX + B$ donc $X - AX = B$ c'est à dire $(I - A)X = B$

Soit $C = I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ -0,5 & 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$

$\det(C) = 0,5^2 - 0 = \frac{1}{4} \neq 0$ donc C est inversible et on a :

$C^{-1} = 4 \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ -0,5 & 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ d'où $X = C^{-1} \times B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

2) a) $V_{n+1} = U_{n+1} - X = AU_n + B - (AX + B) = A(U_n - X) = AV_n$

b) V_n est donc géométrique de raison A d'où $V_n = A^n V_0$ avec $V_0 = U_0 - X = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

On a alors $U_n - X = A^n V_0$ ce qui donne $U_n = A^n V_0 + X$

3) A l'aide de A^n , on trouve : $U_n = \begin{pmatrix} -3 \times 0,5^n + 4 \\ 3n \times 0,5^n + 4 \times 0,5^n - 2 \end{pmatrix}$

On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^n = 0$ et en admettant que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3n \times 0,5^n = 0$, il vient $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = X$

X est appelé **l'état stable** de la suite (U_n)