

DS math expert

Le jeudi 20 octobre 2022

Exercice 1 : Les questions de cet exercice sont indépendantes

- 1) Soit a un entier naturel impair. Montrer que $a^2 + 4a - 5$ est divisible par 8
- 2) Déterminer tous les diviseurs de 630
- 3) x et y sont des entiers naturels. Résoudre l'équation $x^2 - xy = 6$
- 4) Déterminer les entiers relatifs n tels que $n+2$ divise $4n+1$
- 5) a) Montrer que si d divise $(12n+7)$ et $(3n+1)$ alors d divise 3
b) En déduire que la fraction $\frac{12n+7}{3n+1}$ est irréductible

Exercice 2 :

Soient p et q deux entiers naturels tels que $p^2 - 2q^2 = 1$

- 1) Trouver deux entiers p et q vérifiant cette relation et tels que : $1 \leq p \leq 4$ et $1 \leq q \leq 4$
- 2) a) Démontrer que si p et q vérifient $p^2 - 2q^2 = 1$ alors p est impair
b) En déduire alors que q est pair

Exercice 3 : donné en DM

- 1) Démontrer que pour tout entier relatif k , $k^3 - k$ est divisible par 3
- 2) Démontrer que, si trois entiers relatifs x, y, z sont tels que la somme $A = x^3 + y^3 + z^3$ est divisible par 3 alors la somme $B = x + y + z$ est aussi divisible par 3.

On pourra considérer la différence $A - B$

- 3) On suppose dans cette question que $x^3 + y^3 + z^3$ est divisible par 9
 - a) Démontrer alors que $(x+y+z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3)$ est divisible par 9
 - b) On admet que $(x+y+z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3) = 3(x+y)(x+z)(y+z)$
Déduire du 3a que $(x+y)(x+z)(y+z)$ est divisible par 3 et qu'alors l'un au moins des trois nombres x, y ou z est divisible par 3

