DS Terminale math expert

vendredi 2 février

Exercice 1 (8 points) On considère les nombres complexes $z_1 = 1+\mathrm{i}$ **et** $z_2 = 3+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$

1) Ecrire sous forme algébrique $z_1 \times z_2$

$z_1 \times z_2 = (1+\mathrm{i})(3+\sqrt{3}\,\mathrm{i}) = 3+\sqrt{3}\,\mathrm{i}+3\,\mathrm{i}-\sqrt{3} = 3-\sqrt{3}+\mathrm{i}(3+\sqrt{3})$

2) Déterminer le module et l'argument des nombres complexes z_1 , z_2 et $z_1 \times z_2$

$|z_1| = \sqrt{2}$ et $\arg(z_1) = \dfrac{\pi}{4}$ $\quad |z_2| = \sqrt{12}$ et $\arg(z_2) = \dfrac{\pi}{6}$

$|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2| = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

$\arg(z_1 \times z_2) = \arg(z_1)+\arg(z_2) = \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{12}$

3) Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\textit{partie réelle de } z_1 \times z_2}{|z_1 \times z_2|} = \frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}-\sqrt{18}}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\textit{partie imaginaire de } z_1 \times z_2}{|z_1 \times z_2|} = \frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}+\sqrt{18}}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Exercice 2 (4,5 points)

On pose $A(1+4\mathrm{i})$, $B(-3+2\mathrm{i})$ et $C(1+\mathrm{i})$

1) Déterminer l'ensemble E_1 des points $M(z)$ tels que : $|z-1-4\mathrm{i}|=|z+3-2\mathrm{i}|$

$|z_M - z_A| = |z_M - z_B|$ donc AM = BM et il s'agit de la médiatrice de [AB]

2) Déterminer l'ensemble E_2 des points $M(z)$ tels que : $|(1+\mathrm{i})z-2\mathrm{i}|=2$

aide : on pourra factoriser par (1+i) dans le premier membre

$(1+\mathrm{i})z-2\mathrm{i} = (1+\mathrm{i})\left(z-\dfrac{2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right) = \ldots = (1+\mathrm{i})(z-1-\mathrm{i})$

et on a $|(1+\mathrm{i})z-2\mathrm{i}| = |1+\mathrm{i}| \times |z-1-\mathrm{i}| = \sqrt{2} \times |z-1-\mathrm{i}|$

l'égalité devient donc $|z-1-\mathrm{i}| = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ d'où CM = $\sqrt{2}$

il s'agit du cercle de centre C de rayon $\sqrt{2}$

3) Représenter les ensembles E_1 et E_2 dans le plan complexe d'unité 1 cm.

Exercice 3 (7,5 points)

1) a) Déterminer la forme trigonométrique de $z_1 = -\sqrt{3}+\mathrm{i}$

En déduire un argument de $(-\sqrt{3}+\mathrm{i})^8$

$|z_1| = 2$ et $\arg(z_1) = \dfrac{5\pi}{6}(2\pi)$ donc $z_1 = 2\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right)$

$\arg\left(-\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^8 = 8\times\arg\left(-\sqrt{3}+\mathrm{i}\right) = 8\times\frac{5\pi}{6} = \frac{20\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}(2\pi)$

b) Montrer, en raisonnant sur les arguments, que $z_2 = \left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^6$ est un nombre réel

$\arg\left(1+\sqrt{3}\mathrm{i}\right) = \frac{\pi}{3}$ donc $\arg\left(z_2\right) = \frac{6\pi}{3} = 2\pi$ z_2 est donc un réel positif

2) Soit les points $A\left(\frac{3}{2}+3\mathrm{i}\right)$ $B\left(1+\mathrm{i}\right)$ et $C\left(-3\mathrm{i}\right)$

Calculer la mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)$. Que peut-on en déduire ?

$\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right) = \arg\left(\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right) = \arg\left(\frac{\frac{1}{2}+2\mathrm{i}}{-1-4\mathrm{i}}\right) = \ldots = \arg\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi$. Les points A , B et C sont donc alignés

3) En remarquant que $\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3} = \frac{11\pi}{12}$, calculer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

$$\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

$$\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \ldots = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

4) **Bonus** Pour quelles valeurs de n $\in \mathbb{N}$, le complexe $z_n = \left(3-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^n$ est-il imaginaire pur ?

$\arg\left(z^n\right) = n\times\arg\left(3-\mathrm{i}\sqrt{3}\right) = n\times\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{n\pi}{6}$

z_n est imaginaire pur si son argument est $\frac{\pi}{2}$ *à* π prés donc $-\frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{2}+k\pi$

$$-\frac{n}{6}=\frac{1}{2}+k$$

$$n = -3-6k$$