DS complexe math expert

Exercice 1 Forme algébrique

Mettre les nombres suivants sous forme algébrique

$z_1 = \dfrac{2+i}{3+i}$

$z_1 = \dfrac{(2+i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}$

$z_1 = \dfrac{6-2i+3i-i^2}{9-i^2}$

$z_1 = \dfrac{7}{10}+\dfrac{i}{10}$

$z_2 = \dfrac{(2+i)(1-4i)}{1+i}$

$z_2 = \dfrac{2-8i+i-4i\text{^}2}{1+i}$

$z_2 = \dfrac{6-7i}{1+i}$

$z_2 = \dfrac{(6-7i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{-1}{2}-\dfrac{13}{2}i$

Exercice 2 Equation du premier degré

Résoudre dans C les équations suivantes en donnant les solutions sous forme algébrique

1) $z+3i=iz+2$

$z-iz=2-3i$

$(1-i)z=2-3i$

$z = \dfrac{2-3i}{1-i}$

$z = \dfrac{(2-3i)(1+i)}{2}$

$z = \dfrac{5}{2}-\dfrac{i}{2}$

2) $(2-i)z+1=(3+2i)z-i$

$(-1-3i)z=-i-1$

$z = \dfrac{i+1}{1+3i}$

$z = \dfrac{(i+1)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}$

$z = \dfrac{4}{10}-\dfrac{2i}{10}$

3) $\dfrac{2z+i}{iz}=\dfrac{2iz}{1-z}$

$(2z+i)(1-z)=2iz(iz)$

$2z-2z^2+i-iz=-2z^2$

$(2-i)z=-i$

$z = -\dfrac{i}{2-i}$

$z = \dfrac{-i(2+i)}{5}=\dfrac{1}{5}-\dfrac{2i}{5}$

4) $\overline{iz+2} = 2i(z-2)$

$-i\overline{z}+2=2iz-4i$

$-i(x-iy)+2=2i(x+iy)-4i$

$-ix-y+2=2ix-2y-4i$

$-y+2-ix=-2y+i(2x-4)$

par identification

$\begin{cases} -y+2=-2y \\ -x=2x-4 \end{cases}$ ce qui donne $\begin{cases} y=-2 \\ x=\dfrac{4}{3} \end{cases}$ donc $z = \dfrac{4}{3}-2i$

Exercice 3 Equation du second degré

Résoudre dans C les équations suivantes en donnant les solutions sous forme algébrique

1) $z^2+3=0$	2) $z^2-14z+170=0$
$z^2 = -3 = 3i^2$	$\Delta = -484 < 0$ deux racines dans C
donc deux solutions	$z_1 = \frac{14-22i}{2}$ $z_2 = \frac{14+22i}{2}$
$z = \pm\sqrt{3}\,i$	$z_1 = 7-11i$ $z_2 = 7+11i$

Exercice 4

Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses en vous justifiant :

1) Soit z et z' deux nombres complexes

Proposition 1 : Si $z^2+z'^2=0$ alors z = z' = 0

FAUX car si z = 2 et z' = 2i on a bien $z^2+z'^2 = 4+4i^2 = 0$ or $z \neq z' \neq 0$

2) **Proposition 2 :** z est un imaginaire pur si et seulement si $\overline{z}=-z$

VRAI

si z imaginaire pur donc z = iy . On a alors $\overline{z} = -iy = -z$

si $\overline{z}=-z$ alors $x-iy = -x-iy$ d'où $\begin{cases} x=-x \\ -y=-y \end{cases}$ cad x=0 et y réel d'où z imaginaire pur

3) **Proposition 3 :** Si $z = \frac{2+4i}{2-i}$ alors z est un imaginaire pur

$z = \frac{2+4i}{2-i} = \frac{(2+4i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{4+2i+8i-4}{5} = 2i$ donc VRAI imaginaire pur